

# Métoplans de leçons pour l'Agrégation<sup>12</sup>

Isaline Aubert  
Ninon Fétique  
Camille Francini  
Laura Gay  
Caroline Robet  
Maylis Varvenne



1. Un grand merci à Marine Malo, Hélène Hivert, Cyril Lacoste, Adrien Fontaine et Valentin Bahier, on s'est beaucoup appuyé sur leur travail pour construire ces métoplans !
2. La structure de ce document en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X est largement inspirée de Valentin Bahier, encore merci !

# Table des matières

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications . . . . .	4
102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications. . . . .	5
103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications. . . . .	6
104 - Groupes finis. Exemples et applications. . . . .	7
105 - Groupe des permutations sur un ensemble fini. Applications. . . . .	8
106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ . Sous-groupes de $GL(E)$ . Applications. . . . .	9
107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel . . . . .	10
108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications . . . . .	11
109 - Exemples et représentations de groupes finis de petit cardinal. . . . .	12
120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications. . . . .	13
121 - Nombres premiers. Applications. . . . .	14
122 - Anneaux principaux. Exemples et Applications. . . . .	15
123 - Corps finis. Applications. . . . .	16
124 - Anneau des séries formelles. Applications . . . . .	17
125 - Extensions de corps et applications. . . . .	18
126 - Exemples d'équations diophantiennes. . . . .	19
127 - Droite projective et birapport. . . . .	20
140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications. . . . .	21
141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications. . . . .	22
142- Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications. . . . .	23
143 - Résultant. Applications. . . . .	24
144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et appli- cations. . . . .	25
150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices. . . . .	26
151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications. . . . .	27
152 - Déterminant. Exemples et applications. . . . .	28
153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications à la réduction en dimension finie. . . . .	29
154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. . . . .	30
155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie . . . . .	31
156 - Exponentielle de matrices. Applications. . . . .	32
157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents. . . . .	33
158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes. . . . .	34
159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications. . . . .	35
160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)	36

161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3. . . . .	37
162 - Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques. . . . .	38
170 - Forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications. . . . .	39
171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications. . . . .	40
180 - Coniques. Applications . . . . .	41
181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications. . . . .	42
182 - Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies. . . . .	43
190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. . . . .	44
201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications. . . . .	45
202 - Exemples de parties denses et applications. . . . .	46
203 - Utilisation de la notion de compacité. . . . .	47
204 - Connexité. Exemples et applications. . . . .	48
205 - Espaces complets. Exemples et applications. . . . .	49
206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications. . . . .	50
207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications. . . . .	51
208 - Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples. . . . .	52
209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et polynômes trigonométriques. Exemples et applications. . . . .	53
213 - Espace de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications. . . . .	54
214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications. . . . .	55
215 - Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications. . . . .	56
217 - Sous variétés de $\mathbb{R}^n$ . Exemples . . . . .	57
218 - Applications des formules de Taylor. . . . .	58
219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et Applications. . . . .	59
220 - Equations différentielles $X' = f(t, X)$ . Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2. . . . .	60
221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications. . . . .	61
222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires. . . . .	62
223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications. . . . .	63
224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions. . . . .	64
226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples et applications. . . . .	65
228- Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples. . . . .	66
229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. . . . .	67
230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples. . . . .	68
232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$ . Exemples. . . . .	69
234 - Espaces $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ . . . . .	70
235 - Problèmes d'inversion de limites et d'intégrales. . . . .	71
236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. . . . .	72
239 - Fonctions définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. . . . .	73
240 - Produit de convolution. Transformation de Fourier. Applications. . . . .	74

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples. . . . .	75
243- Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. . . . .	76
244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples. . . . .	77
245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ . Exemples et applications. . . . .	78
246 - Séries de Fourier. Exemples et applications. . . . .	79
249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes. . . . .	80
253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse. . . . .	81
254 - Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . . . . .	82
255 - Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions. . . . .	83
260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire. . . . .	84
261 - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications. . . . .	85
262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications. . . . .	86
263 - Variables à densités. Exemples et applications. . . . .	87
264 - Variables aléatoires discrètes. . . . .	88

# 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

1 2

Cadre :  $G$  un groupe,  $X$  un ensemble et  $p$  un nombre premier.

## I - Définitions et premières propriétés

### 1) Actions de groupe

↔ Déf : act à gauche de  $G$  sur  $X$ , Déf :  $G$ -ensemble, Rq : act à droite, Not : act  $G \curvearrowright X$ , Ex :  $\mathfrak{S}(X) \curvearrowright X$ , Thm/def : morph structurel, Rq :  $H < G$  et  $G \curvearrowright X \Rightarrow H \curvearrowright X$ , Déf : pt fixe + orbite + stabilisateur + act libre + act transitive + act  $k$ -transitive, Ex :  $A_n$  ( $n-2$ )-transitif pour  $n \geq 5$ , Prop : ker du morph structurel =  $\cap \{stab\}$ , Déf : act fidèle, Rq : libre  $\Rightarrow$  fidèle, Prop : partit de  $X$  en orbites pour l'act de  $G$  sur  $X$ , Ex : décomp des permutat en produit de cycles de supp disjoints.

### 2) Action d'un groupe fini sur un ensemble fini

↔ Prop : Biject entre  $G/G_x$  et  $G.x$ , Cor :  $G$  fini  $\Rightarrow |G.x| = |G|/|G_x|$ , Cor :  $G$  fini et  $X$   $G$ -ens fini si  $X = \sqcup_{i=1}^r X_i$  partition en orb ss act de  $G$  et si  $x_i = X_i$  alors  $|X| = \sum_{i=1}^r |G|/|G_{x_i}|$ , Thm : Burnside sur le nbre d'orb, Cor : ( $G$  un  $p$ -groupe,  $X$  un  $G$ -ens fini)  $\Rightarrow |X^G| \equiv |X| \pmod{p}$ , App : centre d'un  $p$ -gpe distinct de  $\{1\}$  non réduit à  $\{1\}$ , Thm Cauchy :  $G$  gpe fini avec  $p|G|$  alors  $\exists$  un élt d'ordre  $p$  ds  $G$ .

## II - Groupe agissant sur lui-même

### 1) Action par translation

↔ Déf : act par translation, Thm de Cayley, App : thm de Lagrange, Ex :  $GL(2, 2) \simeq \mathfrak{S}_3$ .

### 2) Action par conjugaison

↔ Déf : act par conjug, Déf : orbite=classe de conjug pour cette act, Déf : éltls conjugués + stabilisateur pour cette act, Rq : act jamais libre ni trans pour  $G \neq \{1\}$ , Rq : centre= ens des points fixes pour cette act, App : gpe d'ordre  $p^2$  tjrs abélien, Ex : classe de conj de  $r^j$  dans  $D_n$ , Ex : 2 permut conjuguées  $\Leftrightarrow$  elles ont même type, Thm :  $A_n$  simple pour  $n \geq 5$

### 3) Thm de Sylow

↔ Déf :  $p$ -Sylow, Ex :  $p$ -Sylow des matrices triang sup avec 1 sur diag dans  $GL_n(F_p)$ , thm de Sylow, Cor :  $S$   $p$ -Sylow  $S \triangleleft G \Leftrightarrow S$  unique  $p$ -Sylow, Ex : gpe d'ordre 63 pas simple.

## III - Actions de groupe et algèbre linéaire

### 1) Actions sur les matrices

↔ Déf : act d'éq  $((P, Q), M) \rightarrow PMQ$   $P$  où  $Q \in GL_n(K)$   $M \in M_n(K)$ , App : matrices dans même orb  $\Leftrightarrow$  même rang, Déf : act de conjug  $(P, M) \rightarrow P^{-1}MP$ , Déf : matrices semblables, App : réduct d'endo, Déf : act de congruence  $(P, M) \rightarrow {}^t PMP$ , App : matrices congrues = même forme quadratique dans 2 bases.

### 2) Représentations

↔ Déf : rep en exhibant le morphisme structurel, Ex : rep triviale + rep par permut + rep régulière.

### 3) (+ Action sur un espace de polynômes)

↔ Déf : act sur les polynômes, thm de Molien

## IV - Applications des actions de groupe à la géométrie

### 1) Groupe projectif

↔ Déf : gpe lin projectif  $PGL(V)$  + gpe spécial lin projectif  $PSL(V)$ , Déf : act de  $GL(V)$  sur  $\mathbb{P}(V)$ . App : Isomorphismes exceptionnels

### 2) Angles orientés

↔ Action de  $SO_2(R)$  sur  $S^1 \times S^1$ , Prop : orbites de cette act = angles orientés.

### 3) Groupe d'isométrie

↔ Prop : isométrie du cube opère sur les sommets / isométries du tétraèdre, (Prop :  $D_n$  agit sur racine  $n$ -ième de l'unité).

---

1.

- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour exemples, th de sylow, DVPT 1 & 2)
- Ulmer, *Théorie des groupes* (pour une grande majorité, DVPT 1 & 2)
- Gourdon, *Algèbre*, 2ème édition (III.1)
- Alessandri, *Thèmes de géométrie* (pour IV.2, IV.3)
- (Leichtnam, *Exercices corrigés posés à l'oral des concours* (III.3, DVPT 3))

**2. Rapport du Jury** : Dominer 2 approches de l'act : naturelle et par morph structurel. ex différents doivent être présentés : sur ens fini, sur ev (rep), sur un ens de matrices, sur des polynômes. Bcp d'ex en géométrie (gpes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les act naturelles de  $PGL(2, q)$  sur la droite projective qui donnent des inject intéressantes pour  $q=2, 3$ . Généralisat en petit cardinal à des isomorph de gpes. Enfin, l'inject du gpe de permutat dans le gpe linéaire par les matrices de perm  $\Rightarrow$  rep : calcul caractère.

# 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications. <sup>3 4</sup>

## I - Nombres complexes de module 1

### 1) Définitions, trigonométrie

↔ **A-F** : Déf : gpe des nombres complexes de module 1 noté  $\mathbb{U}$ , Thm : isomorphisme de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$  sur  $\mathbb{C}^*$ , Déf : appli  $\exp(ix)$  notée  $\mathcal{E}$ , Ex :  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , Thm :  $\mathcal{E}$  est un morphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{U}$ , Csq :  $\mathcal{E}$  définit un isomorphisme de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{U}$ , Déf : fonctions cos et sin, Prop : formule de Moivre et formules d'Euler, Ex, App : Calcul de la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$  + linéarisation de  $\cos^n(x)$  + existence des polynômes de Tchebichev.

### 2) Considération géométrique

↔ **Combes** : Prop : paramétrisation de  $\mathbb{U}$  avec  $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ , App : résolution de  $x^2 + y^2 = z^2$  (triplets pythagoricien).

↔ **A-F** : Déf : argument, Thm : soit  $z \in \mathbb{C}^*$  alors  $\arg(z) = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ , Ex : un arg de  $1+i$  est  $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ , Rq : forme trigo de  $z$ , Déf : argument principal noté Arg, Ex :  $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$ .

↔ **Audin** : Notation :  $O^+(n)$  gpe des isométries positives, Prop :  $O^+(2)$  est isomorphe et homéomorphe à  $\mathbb{U}$ , Déf : angles orientés comme une classe d'équiv, Prop : bijection entre {angles orientés} et  $O^+(2)$ , Cor : isomorphisme entre  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $O^+(2)$ .

## II - Sous-groupe des racines de l'unité

### 1) Définitions, premières propriétés

↔ **Gozard** : Déf : racines  $n$ -ièmes de l'unité et  $\mathbb{U}_n$ , Rq : les élts de  $\mathbb{U}_n$  sont les sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés, Ex : Thm de Kronecker (**Gourdon**), Prop :  $\mathbb{U}_n$  est cyclique d'ordre  $n$  et isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , Déf : racines primitives  $\mathcal{P}_n$ , Prop : cardinal de  $\mathcal{P}_n$  et générateurs, Ex : racines primitives 6èmes de l'unité, Prop :  $\mathbb{U}_n = \sqcup_{d|n} \mathcal{P}_d$ , App :  $\varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ .

### 2) Polynômes cyclotomiques

↔ **Gozard** : Déf : poly cyclotomique  $\phi_m$  et  $\deg(\phi_m) = \varphi(m)$ , Prop :  $X^m - 1 = \prod_{d|m} \phi_d(X)$ , Prop :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ , App : calcul des  $\phi_n$  par récurrence, Ex de poly cyclo, Thm : Irréductibilité des poly cyclotomiques (**Gourdon**), App : corollaire Kronecker, Cor : Soit  $\omega_n \in \mathcal{P}_n$  alors  $[\mathbb{Q}(\omega_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ .

## III - Applications ("Vers d'autres horizons...")

### 1) Algèbre linéaire

↔ **FGN A12** : Déf : matrice circulante, Thm :  $\mathcal{A} = \{\text{matrices circulantes}\}$  alors  $\mathcal{A}$  est une ss-alg commutative et les éléments de  $\mathcal{A}$  sont simultanément diagbles avec des vp de la formes  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k$  où  $\omega \in \mathbb{U}_n$ .

### 2) Polygones réguliers constructibles

↔ **Gozard** : Déf : point constructible en un pas à partir d'une partie du plan, Déf : point constructible à partir d'une partie du plan, Déf/Prop : réel constructible, Thm : Wantzel, Déf : polygone constructible, App : construction du polygone à 5 côtés, Thm de Gauss-Wantzel

### 3) Représentations de groupes finis (si on a encore de la place...)

↔ **Colmez** : Prop : si  $G$  d'ordre  $n$  alors  $Sp(\rho_V(g)) \subset \mathbb{U}_n$ , App :  $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ .

↔ **Peyré** : Table de caractères d'un groupe cyclique d'ordre  $n$ .

---

### 3.

- Arnaudiès, Fraysse, *Cours de Mathématiques 1, Algèbre* (pour I-1-2)
- Combes, *Algèbre et géométrie* (pour paramétrisation de  $\mathbb{U}$ )
- Audin, *Géométrie* (pour isomorphisme entre  $O^+(2)$  et  $\mathbb{U}$ , pour angles orientés)
- Gozard, *Théorie de Galois* (pour II & III-2)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 2* (pour III-1)
- Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre* (pour représentations)
- Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier* (pour table de caractères d'un groupe cyclique)

**4. Rapport du Jury** : Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, théorie des représentations, spectre de certaines matrices remarquables).

# 103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications. <sup>5 6</sup>

Cadre :  $(G, \cdot)$  gpe de neutre 1,  $H$  sous-gpe de  $G$ .  $G'$  un autre gpe.  $\varphi : G \rightarrow G'$  un morph de gpes.

Motivations : « Dévissage des groupes » = se ramener à des gpes de cardinaux plus petits.

## I - Notion de sous-groupes distingués et groupe quotient

### 1) Classe d'équivalence

↔ Déf : classe à gauche, Rq : (déf de classe à droite, classes = partition de  $G$ ), Déf :  $G/H$  en tant qu'ensemble des classes à gauche, Déf : indice, Thm de Lagrange, Cor : l'ordre de tout élément de  $G$  divise l'ordre de  $G$ .

### 2) Groupe distingué

↔ Déf : ss-gpe distingué, Ex : ss-gpes triviaux/gpe abélien/centre, C-ex :  $GL_n(\mathbb{Z})$  non distingué dans  $GL_n(\mathbb{R})$ , Prop :  $H \triangleleft G \Leftrightarrow$  égalité des classes, Prop : noyau est distingué, Prop : ss-gpe d'indice 2 tjrs distingué, Ex :  $\mathcal{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$ .

### 3) Groupe quotient

↔ Déf-prop : gpe quotient en tant que gpe lorsque  $H \triangleleft G$ , Rq :  $H$  distingué  $\Leftrightarrow H = \text{Ker}(\varphi)$ , Propr universelle (avec diagramme commutatif), 1er Thm d'isomorphisme, Ex :  $GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$  avec det, App : un gpe cyclique fini d'ordre  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , App :  $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$  est principal.

## II - Groupes et sous-groupes remarquables

### 1) Groupe simple

↔ Déf : gpe simple, Ex :  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  simple si  $p$  premier, Ex :  $SO_3(\mathbb{R})$  est simple, Prop : les seuls gpes simples abéliens = gpes cycliques d'ordre premier.

### 2) Produit direct

↔ Déf-prop : produit direct en tant que gpe, Rq : un produit direct n'est jamais simple, Lemme chinois, Rq : cas de non primitude dans le lemme chinois, C-ex :  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  non isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### 3) $p$ -groupes et théorème de Sylow

↔ Déf :  $p$ -groupe (attention au tt début du [PER]), Déf :  $p$ -Sylow, thm de Sylow (très complet), Cor : CNS d'unicité d'un  $p$ -Sylow, App : un gpe d'ordre 63 n'est pas simple.

## III - Applications

### 1) Groupes symétrique et alterné

↔ Déf : gpe dérivé, Rq :  $D(G) \triangleleft G$  et  $G/D(G)$  abélien, Ex : gpe dérivé d'un groupe abélien, Déf : suite dérivée, Déf : gpe résoluble, Ex : gpe abélien, C-ex : gpe simple non abélien, Thm : équivalences de déf de la résolubilité, Thm : ac des ss-gpes d'un gpe résoluble distingué ou non, App :  $p$ -gpe fini résoluble.

↔ Déf :  $\mathfrak{S}_n$  + son cardinal, Prop : {transpo}= une classe de conjugaison et {3-cycles} idem, Déf : signature, Déf : signatures paires et impaires, Déf :  $\mathcal{A}_n$ , Prop :  $\mathcal{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$  (l'indice vaut 2), Prop : les 3-cycles engendrent  $\mathcal{A}_n$  et sont conjugués dans  $\mathcal{A}_n$ , Thm :  $\mathcal{A}_n$  simple pour  $n \geq 5$ , Cor : gpes dérivés de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$ , Cor : les ss-gpes distingués de  $\mathfrak{S}_n$ , App :  $\mathcal{A}_n$  est le seul ss-gpe d'indice 2 de  $\mathfrak{S}_n$ , Cor :  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$  non résolubles.

### 2) Caractères et sous-groupes distingués

↔ propriétés reliant noyau des caractères et sous-gpes distingués, Cor : gpe simple, App :  $D_6$  et ss-gpes distingués de  $D_6$ , App : Table de  $\mathfrak{S}_4$ .

---

5.

- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour la majorité + DVPT 2)
- Félix Ulmer, *Théorie des groupes* (pour les groupes quotients et la résolubilité + DVPT 1 & 2)
- Josette Calais, *Elements de théorie des groupes*, 3ème édition. (pour une prop et pour se rassurer)

**6. Rapport du Jury** : Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral  $D_n$  par exemple). On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions.

## 104 - Groupes finis. Exemples et applications. 78

### I - Définitions et premières propriétés

#### 1) Groupe fini et ordre

↔ Déf : ordre d'un groupe et groupe fini, Ex :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , Déf : ordre d'un élément, Ex :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $GL_2(2)$  d'ordre 2, Déf : exposant d'un groupe, Ex : groupe fini d'exposant 2 est abélien, Thm : Burnside, C-ex :  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  d'exposant 2 mais groupe infini.

#### 2) Théorème de Lagrange

↔ Déf : indice, Ex :  $(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}) = 2$ , Thm :  $|G| = |H| (G : H)$ , Thm : Lagrange, App :  $K, M$  ss-groupes d'ordre  $k, m$ , alors  $k \wedge m = 1 \Rightarrow K \cap M = \{e\}$

#### 3) Théorème de factorisation de morphismes

↔ Thm :  $f$  morph de groupe de  $G$  dans  $G'$  et  $j : G \rightarrow G/H$  alors  $\exists! \bar{f} : G/H \rightarrow G'$  tq  $\bar{f} \circ j = f$ , Cor :  $G/\text{Ker}(f)$  et  $f(G)$  sont isomorphes, Ex :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}_n$ .

#### 4) Action de groupe

↔ Déf : action et morphisme structurel, Déf : orbite et stabilisateur, Thm : formule des classes et formule de Burnside, Prop :  $G$  un  $p$ -groupe et  $G \curvearrowright X$  alors  $|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$ , Thm de Cauchy, Cor :  $|G|$  est une puissance de  $p \Leftrightarrow$  l'ordre de tout élément de  $G$  est une puissance de  $p$ , Ex : Soit  $G$  groupe fini  $\neq \{e\}$  et  $p$  le plus petit premier divisant  $|G|$  alors tout  $H < G$  d'indice  $p$  est distingué.

### II - Cas des groupes finis abéliens

#### 1) Groupes cycliques

↔ Déf : gpe cyclique, Ex :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{U}_n$ , Prop : ordre de  $a^k$  où  $a$  générateur de  $G$  cyclique Ex : générateurs de  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{U}_{18}$ , Prop : 2 gpes cycliques sont isomorphes  $\Leftrightarrow$  même ordre, Cor : ordre et générateurs de  $\text{Aut}(G)$ , Prop :  $G$  cyclique d'ordre  $n \Rightarrow$  tout  $H < G$  est cyclique et  $\forall d | n \exists!$  sous-groupe d'ordre  $d$ , Ex : ss-gpes de  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$  et élts d'ordre 6 dans  $\mathbb{U}_{30}$ , Déf : gpe simple, Prop :  $G$  d'ordre premier  $\Leftrightarrow G$  cyclique et simple, Cor :  $G$  d'ordre  $p^2$  alors  $G$  abélien, Cor : un groupe cyclique d'ordre  $n$  est isom à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , Prop :  $G_1 \times G_2$  cyclique  $\Leftrightarrow G_1$  et  $G_2$  cyclique d'ordres premiers entre eux.

#### 2) Décomposition en facteurs invariants

↔ Prop : décomposition des groupes abéliens finis, Déf : invariants de  $G$ , Cor : décomposition des  $p$ -groupes, Cor :  $G$  groupe abélien fini alors pour  $d$  diviseur de  $|G| \exists$  sous-groupe d'ordre  $d$ , Ex : décomposition de  $(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$  et structure d'un groupe abélien d'ordre 600.

### III - Groupes finis non-abéliens

#### 1) Théorème de Sylow, un outil pour l'étude

↔ Déf :  $p$ -Sylow, Thm de Sylow, Prop :  $p$ -Sylow distingué  $\Leftrightarrow$  c'est le seul, App : groupe d'ordre 15 est cyclique, App : structure d'un groupe fini d'ordre 153.

#### 2) Groupe symétrique

↔ Déf : groupe sym, Thm de Cayley, Déf : cycle de longueur  $l$ , Thm : décomposition en cycles à supports disjoints, Déf : signature, Prop :  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\#(\sigma)}$ , Prop :  $\mathcal{S}_n$  engendré par  $(1, i)$ , Déf :  $\mathcal{A}_n$  comme noyau de  $\varepsilon$ , Prop :  $\mathcal{A}_n$  engendré par 3-cycles,  $\mathcal{A}_n$  est simple  $n \geq 5$

#### 3) Groupe diédral

↔ Déf :  $D_n$ , Prop : ordre + élts + générateurs + ss-groupe distingué de  $D_n$ .

### IV - Applications

#### 1) Géométrie

↔ Déf :  $\text{Isom}$  et  $\text{Isom}^+$ , Prop : Isométries du tétraèdre et du cube.

#### 2) Représentations de groupes

↔ Déf : représentation, Déf : caractère, App : table de  $\mathcal{S}_4$ , Cor :  $G$  groupe fini est simple  $\Leftrightarrow$  tout caract irréd non trivial de  $G$  a un noyau trivial.

---

7.

- Félix Ulmer, *Théorie des groupes* (pour la moitié)
- Michel Alessandri, *Thèmes de Géométrie* (pour IV.1)
- François Combes, *Algèbre et géométrie* (pour l'autre moitié)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2* (pour Burnside)

**8. Rapport du Jury :** Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries  $\mathcal{A}_4; \mathcal{S}_4; \mathcal{A}_5$  et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu. On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ( $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \mathcal{S}_n$ ; etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à support disjoint. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.



# 105 - Groupe des permutations sur un ensemble fini. Applications.

9 10

## I - Généralités sur le groupe symétrique

### 1) Définitions et premières propriétés

↪ **Ulmer** : Déf : groupe symétrique de  $X$  et cas de  $X = \{1, \dots, n\}$ , Prop : Si  $|X| = n$  alors  $\mathfrak{S}(X) \simeq \mathfrak{S}_n$  et  $|\mathfrak{S}_n| = n!$ , Notation :  $(\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n))$ , Rq : En général  $\mathfrak{S}_n$  n'est pas abélien + ex dans  $\mathfrak{S}_3$ , Déf : morph structural d'une action de gpe, Thm : Cayley, App (**Perrin**) : Soit  $G$  un groupe fini et  $p$  un diviseur premier de  $|G|$  alors  $G$  contient au moins un  $p$ -Sylow.

### 2) Orbites et cycles

↪ **Ulmer** : Déf : points fixes et support d'une permutation, Prop : 2 permutations à support disjoints commutent, Déf :  $l$ -cycle et un 2-cycle s'appelle une transposition, Rq : nombre de  $l$ -cycles dans  $\mathfrak{S}_n$  est  $\binom{n}{l}(l-1)!$ , Ex :  $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (1, 4, 2, 5)$ , Thm : décomposition d'une permutation en produit de cycles à support disjoints + écriture unique à l'ordre près, Ex :  $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{smallmatrix}\right) = (1, 2, 4)(3, 5)$ , Déf : type, Ex : type de  $\sigma_1 : [1, 2, 3]$ , Prop : ordre d'une permutation de type  $[l_1, \dots, l_m] = \text{ppcm}(l_1, \dots, l_m)$ , Ex : ordre de  $\sigma_1$ , Prop : 2 permutations sont conjugués dans  $\mathfrak{S}_n \Leftrightarrow$  elles sont de même types, App : types possibles dans  $\mathfrak{S}_4$ , App : 

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$
---

### 3) Générateurs

↪ **Ulmer** : Lem : tout  $l$ -cycle s'écrit comme produit de  $l-1$  transpositions, Ex.  
 ↪ **Perrin** : Prop : les transpositions engendrent  $\mathfrak{S}_n$  + différents systèmes de générateurs, Prop :  $(1, 2)$  et  $(1, 2, \dots, n)$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$ , Rq : il s'agit du plus petit syst de générateurs car  $\mathfrak{S}_n$  non abélien si  $n \geq 3$ .

## II - Signature, groupe alterné

### 1) Signature

↪ **Ulmer** : Déf : signature, Ex :  $\varepsilon((1, 2)) = -1$ , Prop : différentes expressions de la signature +  $\text{Im}(\varepsilon) = \{-1, 1\}$ , Rq : la signature est le seul morphisme non trivial de  $\mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ .

### 2) Groupe alterné

↪ **Ulmer** : Déf : permutation paire et impaire, Déf :  $\text{Ker}(\varepsilon) = \mathcal{A}_n$  distingué dans  $\mathfrak{S}_n$  c'est le groupe alterné, Prop :  $|\mathcal{A}_n| = |\mathfrak{S}_n|/2$  et  $\mathcal{A}_n$  est d'indice 2, Ex :  $\mathcal{A}_4$ , Prop :  $\mathcal{A}_n$  est engendré par les 3-cycles de  $\mathfrak{S}_n$ , App :  $\mathcal{A}_n$  est le seul ss-gpe d'indice 2 de  $\mathfrak{S}_n$ .  
 ↪ **Perrin** : Prop :  $\mathcal{A}_n$  est  $(n-2)$ -transitif, Prop : si  $n \geq 5$  les 3-cycles et les doubles transpo sont conjugués dans  $\mathcal{A}_n$ , Prop : ss-gpes distingués de  $\mathfrak{S}_n$ , App : 

Simplicité de $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$
---

### 3) Structure de $\mathcal{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$

↪ **Perrin** : Prop :  $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 5$  et  $D(\mathfrak{S}_n) = \mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 2$ , Ex :  $\mathcal{A}_4$  n'est pas simple, Prop : tt ss-gpe de  $\mathfrak{S}_n$  d'indice  $n$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_{n-1}$ , Prop :  $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$ .

## III - Applications

### 1) Déterminants

↪ **Gourdon** : Déf : appli  $p$ -linéaire alternée et symétrique, Rq :  $(f \text{ antisym}) \Leftrightarrow (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p \text{ on a } f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p))$ , Thm : si  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$  alors antisym  $\Leftrightarrow$  alterné, Thm : l'ensemble des formes  $n$  linéaires alternées sur  $E$  (de dim  $n$ ) est un ev de dim  $1 + \det$ .

### 2) Polynômes symétriques

↪ **Gourdon** : Déf : polynôme symétrique, Ex :  $P(X, Y, Z) = XY + YZ + ZX$ , Déf : polynômes sym élémentaires, Ex, Thm de structure, Ex, App : Thm de Kronecker (**FGN A11**).

### 3) Isomorphismes exceptionnels

↪ **Perrin** : isomorphismes exceptionnels

### 4) Groupe d'isométries de polyèdres réguliers

↪ **Alessandri** : Déf :  $\text{Isom}(X)$  et  $\text{Isom}^+(X)$ , Prop : 

isométries du tétraèdre et du cube
------------------------------------

9.

- Ulmer, *Théorie des groupes* (pour presque tout I & II)
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour pas mal de choses de I & II + isomorphismes exceptionnels)
- Alessandri, *Thèmes de géométrie* (pour isométries)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (pour Kronecker)
- Gourdon, *Algèbre* (pour déterminant et polynômes symétriques)

**10. Rapport du Jury** : Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en produit de cycles disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs, un candidat qui propose de démontrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à  $\mathcal{A}_5$  devrait aussi savoir montrer que  $\mathcal{A}_5$  est simple. L'existence d'un morphisme signature est un résultat non trivial, mais ne peut constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétriques ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers. Il faut par exemple savoir faire le lien avec les actions de groupes sur un ensemble fini. Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique par la décomposition en cycles.

# 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ . Sous-groupes de $GL(E)$ . Applications. <sup>11 12</sup>

Cadre :  $K$  est un corps quelconque et  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$ .

## I - Le groupe linéaire

### 1) Généralités

↔ **Perrin** : Déf :  $GL(E), GL_n(K)$ , Prop : isomorphisme entre ces deux espaces, Rq : il n'est pas canonique, Prop :  $f$  bijective  $\Leftrightarrow$  injective  $\Leftrightarrow$  surjective  $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$  et Rq : contre exemple en dimension infinie (**Gourdon**), Prop :  $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$  envoie une base sur une base (**sans ref**), Déf :  $SL(E), SL_n(K)$ .

### 2) Générateurs

↔ **Perrin** : Déf/Prop : équivalences des déf d'une réflexion, Déf/Prop : équivalences des def d'une transvection, Prop : la conjugaison d'une transvection est une transvection, Thm : générateurs de  $GL(E)$  et  $SL(E)$ .

## II - Exemples de sous-groupes

### 1) Centre et groupe dérivé

↔ **Perrin** : Lem : si  $u$  laisse invariante toutes les droites vectorielles alors  $u$  est une homothétie, Thm : centres de  $GL(E)$  et  $SL(E)$ , Déf :  $PGL(E)$  et  $PSL(E)$ , Thm : groupes dérivés de  $GL(E)$  et  $SL(E)$ , App : factorisation d'un morphisme de  $GL_n(K)$  dans un groupe abélien par le déterminant (**OA**).

### 2) Groupe orthogonal

↔ **Perrin** : On suppose ici  $\text{car}(K) \neq 2$  : Déf : isométries et groupe orthogonal  $O(f)$ , un ex (**Grifone**), Rq : expression matricielle et déterminant 1, Prop : équivalence avec conservation par la forme quadratique, Déf :  $SO(f)$ , Ex : symétrie/réflexion/renversement, Thm : générateurs de  $O(E)$  et  $SO(E)$  dans le cas euclidien.

### 3) Sous-groupes finis

↔ **OA** : Déf : matrice de permutation, Rq : déterminant en fonction de la signature, Prop : injection de  $S_n$  dans  $GL_n(K)$ , Rq : par le thm de Cayley on voit tout groupe d'ordre  $n$  comme un sous groupe de  $GL_n(K)$ , Prop : tout groupe fini de  $GL_n(K)$  dont tous les éléments sont d'ordre 2 est d'ordre une puissance de 2, Thm : Burnside (**FGN A12**).

## III - Action de $GL(E)$

### 1) Action de $GL(E)$ sur les sev de $E$

↔ **Perrin** : Prop :  $GL(E)$  agit transitivement par translation sur  $E$ , Prop :  $GL(E)$  agit transitivement sur les bases de  $E$ , Prop : si  $V_1, V_2$  sont deux sev de  $E$  de même dimension alors  $\exists u \in SO(E)$  tq  $u(V_1) = V_2$ .

### 2) Action de $GL(E)$ ou $GL(E) \times GL(E)$ sur $L(E)$

↔ **H2G2** : Déf : action par translation sur  $M_n(K)$ , Prop : les orbites sont caractérisées par le noyau, Déf : action par conjugaison, Thm/Def : invariants de similitude, Thm : les orbites sont caractérisées par les invariants de similitude, Déf : action par congruence, Thm : les orbites sont caractérisées par la signature, Déf et thm : Action de Steinitz

### 3) Action de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ sur $P_1(\mathbb{F}_q)$

↔ **Perrin/H2G2** : Prop : cardinaux de  $GL_n(\mathbb{F}_q)$  etc, Morphisme injectif de  $PGL_2(\mathbb{F}_q)$  dans  $S_{q+1}$ , Prop : isomorphismes exceptionnels

## IV - Eléments de topologie

### 1) Densité

↔ **Mneimné, Testard** : Prop :  $GL_n(K)$  est un ouvert dense de  $M_n(K)$  pour  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , App :  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ , Prop : il existe une base de  $M_n(K)$  formée de matrices inversibles.

### 2) Connexité

↔ **Mneimné, Testard** : Prop :  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe, App : surjectivité de l'exponentielle, Prop : connexité de  $GL_n^+(\mathbb{R})$  / de  $SL_n(\mathbb{R})$  / de  $SL_n(\mathbb{C})$ , Prop :  $SO_n$  est connexe par arc et  $O_n$  a deux composantes connexes homéomorphes.

### 3) Compacité

↔ **Mneimné, Testard** : Prop :  $O_n$  est compact, App : décomposition polaire, Cor :  $SO_n$  est compact, App : simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$ , Thm : sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$

11.

- Gourdon, *Algèbre* (pour quelques petits trucs)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (idem)
- Perrin, *Cours d'algèbre* (pour presque tout)
- Caldero, Germoni, *H2G2* (pour les actions)
- Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques* (pour la partie topologie)

**12. Rapport du Jury** : Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur  $GL(E)$ . Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, ...) A quoi peuvent servir des générateurs du groupes  $GL(E)$ ? Qu'apporte la topologie dans cette leçon? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral. Certains candidats affirment que  $GL_n(K)$  est dense et ouvert dans  $M_n(K)$ . Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps  $K$  ainsi que la topologie sur  $M_n(K)$ . Il faut savoir réaliser  $S_n$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$  et faire le lien entre signature et déterminant.

# 107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -ev

13 14

Cadre : On considère des groupes finis et des  $\mathbb{C}$ -ev de dim finie. Soit donc  $G$  un groupe fini d'élément neutre  $e$

## I - Représentations d'un groupe fini

### 1) Définitions et premiers exemples

$\leftrightarrow$  Déf : représentation et degré, Rq : représentation = action, Déf : fidèle, Ex : triviale + permutation + régulière + cyclique, Déf : morphisme de représentation + représentations équivalentes, Rq : équiv  $\Rightarrow$  même degré.

### 2) Sous-représentations et opérations sur les représentations

$\leftrightarrow$  Déf : sous-représentation, Ex :  $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$  ss-rep de la rep de permutation + si  $\varphi$  morphisme de rep  $\text{Ker}(\varphi)$  et  $\text{Im}(\varphi)$ , Déf/prop : représentations  $V_1 \oplus V_2$ ,  $\text{Hom}(V_1, V_2)$ .

### 3) Représentations irréductibles

$\leftrightarrow$  Déf : irréductible + réductible + complètement réductible, Ex : rep de deg 1 irréductibles, Prop/déf :  $V^G$  point fixes, Thm : Maschke, Cor : tte rep de  $G$  est somme directe de rep irréd, Cor : tt sous groupe abélien fini de  $GL_n(\mathbb{C})$  peut être mis simultanément sous forme diagonale, Lemme de Schur.

## II - Théorie des caractères

### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : fct centrale, Rq : fcts centrales forment un  $\mathbb{C}$ -ev, Déf : caractère Thm de Molien, Rq :  $\text{deg}(\chi) = \chi(e) +$  rep isomorphes ont même caractères + caractère est une fonction centrale, Prop : caractère est un morphisme ssi il est de degré 1, Ex : caractère de permutation et régulière, Prop :  $\chi_{V \oplus W}, \chi_{V'}, \chi_{\text{Hom}(V, W)}$ .

### 2) Caractère irréductible et orthogonalité

$\leftrightarrow$  Déf : carac irréd, Déf : produit scalaire de carac, Thm de Frobenius, Thm : tout carac irréd apparait  $\text{deg}(\chi)$  fois dans celui de la rep régulière, nb de carac irréd = nb de classes de conjugaison de  $G$ ,  $|G| = \sum \chi(e)^2 \chi$  irréd.

### 3) Table de caractères d'un groupe fini

$\leftrightarrow$  Déf : table de caractère, Rq : elle est carrée + orthogonalité des colonnes, Rq : avec  $C_1 = e \sum \text{deg}(\chi)\chi(C_2) = 0$ , Ex :  $\mathfrak{S}_3$ , Table de  $\mathfrak{S}_4$

## III - Représentations et théorie des groupes

### 1) Caractères d'un groupe abélien fini

$\leftrightarrow$  Prop :  $G$  fini commutatif d'ordre  $n$  ses carac sont d'ordres 1 et il y en a  $n$ , Thm :  $G$  abélien fini  $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$  où  $k, m_i \in \mathbb{N}$  et  $m_i \mid m_{i+1}$ , Ex : table de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , Cas particulier des groupes cycliques : description des  $n$  caractères irréductibles et table de caractères.

### 2) Caractères et sous groupes distingués

$\leftrightarrow$  Déf : noyau d'un caractère, Prop : tt ss-gpe distingué de  $G$  est de la forme  $\bigcap_{j \in J} \text{Ker}(\chi_j)$  avec  $J \subset \{1, \dots, m\}$ , Cor :  $G$  gpe fini simple  $\Leftrightarrow$  tt caractère irréd non trivial a un noyau trivial, App : table de caractères de  $D_6$  et ss-gpes distingués de  $D_6$ .

### 3) (+ Résolubilité)

$\leftrightarrow$  Déf : résoluble, Thm de Burnside, App :  $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{A}_4$

---

13.

- F.Ulmer, *Théorie des groupes* (presque tout)
- G.Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier* (orthogonalité des colonnes, III.3)
- Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre* (représentations de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et presque tout car notations du Ulmer bizarres...)
- Leichtnam, *Algèbre 1* (Molien)

**14. Rapport du Jury** : Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit d'une part savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit aussi savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et aussi savoir trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les développements prouvent souvent qu'un candidat qui sait manier les techniques de bases sur les caractères ne sait pas forcément relier ceux-ci aux représentations. Dans le même ordre d'idée, le lemme de Schur est symptomatique d'une confusion dans le cas où deux représentations  $V$  et  $V'$  sont isomorphes, on voit que les candidats confondent isomorphisme de  $V$  dans  $V'$  avec endomorphisme de  $V$ . Ce qui revient implicitement à identifier  $V$  et  $V'$ , ce que le candidat devrait faire de façon consciente et éclairée.

# 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications

15 16

Introduction : **Perrin** : Déf générateurs, Ex groupe dérivé

## I - Groupes abéliens

### 1) Définitions et premiers exemples

↔ **Gourdon** : Déf : monogène, Rq : gpe monogène est abélien, Ex : ss-gpes de  $\mathbb{Z}$ , si monogène alors isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou cyclique (**Perrin**), Prop :  $\langle m, n \rangle = (m \wedge n)\mathbb{Z}$ , Prop : les générateurs de  $G$  et leur nombre, Prop :  $f$  morphisme entre  $G$  monogène et  $H$  est déterminé par  $f(a)$  (**pas de réf**).

↔ **Combes** : App :  $\mathbb{U}_n$  engendré par  $e^{2i\pi/n}$ , App : symbole de Legendre (**OA**), Prop : sur les automorphismes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

↔ **Perrin** : Thm :  $\mathbb{F}_q^*$  est cyclique.

### 2) Groupes abéliens fini

↔ **Combes** : Lemme chinois (**Perrin**), Thm de structure, Déf : suite des invariants, Cor : pour groupe d'ordre  $p^n$ , Ex.

## II - Groupes symétriques et diédraux

### 1) Le groupe symétrique

↔ **Perrin** : Prop : les transpositions engendrent  $\mathfrak{S}_n$ , Prop : cycles d'ordre 3 engendrent  $\mathfrak{A}_n$ ,  $\mathfrak{A}_n$  est simple, Cor : sur  $D(\mathfrak{A}_n)$  et  $D(\mathfrak{S}_n)$ .

### 2) Groupes diédraux

↔ **Ulmer** : Prop :  $D_n$  est engendré par  $r$  et  $s$ , App : table de caractères de  $D_6$  et ss-gpes distingués de  $D_6$  (**Peyré et Ulmer**), App :  $D(D_6)$ .

## III - Générateurs en algèbre linéaire

### 1) $GL(E)$ et $SL(E)$

↔ **Perrin** : Déf : dilatation + transvection, Prop : générateurs de  $GL(E)$  et  $SL(E)$ , App :  $SL_n(\mathbb{K})$  est connexe par arcs ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) (**FGN A12**), Thm :  $D(GL_n(\mathbb{K})) + D(SL_n(\mathbb{K}))$ , (App : Frobenius Zolotarev) (**OA**)

### 2) Groupe orthogonal

↔ **Perrin** : Déf : réflexion et renversement, Prop : générateurs de  $O(E)$  et  $SO(E)$ , Rq : si  $u \in SO(E)$   $u$  est un produit pair de réflexions, App :  $SO_3$  est simple (**FGNA13**), Prop :  $D(O(E))$  et  $D(SO(E))$ .

### 3) Homographies sur la droite projective

↔ **Perrin et Audin** : Thm : centre de  $GL(E)$  et de  $SL(E)$ , Déf :  $PGL(E)$  et  $PSL(E)$  (**Perrin**), Prop : déf de  $PGL(E)$  avec homographies, Prop : générateurs de  $PGL_2(\mathbb{C})$ , App : les élts de  $PGL_2(\mathbb{C})$  conservent les angles orientés.

---

15.

- Perrin, *Cours d'Algèbre* (Intro, qqs trucs dans le I, II.1, III.1, III.2, déf PGL, PSL)
- Gourdon, *Algèbre* (I.1)
- Combes, *Algèbre et Géométrie* (qqs trucs de I.1, I.2.)
- Beck, *Objectif Agrégation* (Frobenius-Zolotarev)
- Ulmer, *Théorie des groupes* (II.2)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre 2* ( $SL_n(\mathbb{K})$  est connexe)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre 3* (Simplicité de  $SO_3$ )
- Audin, *Géométrie* (III.3)

16. **Rapport du Jury** : C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidat voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.

# 109 - Exemples et représentations de groupes finis de petit cardinal.

17 18

Cadre :  $G$  un groupe fini,  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

## I - Théorie générale

### 1) Définitions et premiers exemples

↔ Déf : représentation linéaire, Déf : degré d'une rep, Ex : rep triviale + rep régulière + rep permutation, Déf : fonction centrale, Déf : caractère d'une rep, Rq : un caractère est une fct centrale, Ex : une rep de degré 1 comme la signature est un caractère, Rq : un caractère de  $\dim > 1$  n'est pas un morph de gpe, Ex :  $\text{Hom}(V_1, V_2)$  et  $\chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)} = \bar{\chi}_{V_1} \chi_{V_2}$ , Déf : prod scalaire sur l'espace des fct centrales.

### 2) Décomposition des représentations

↔ Déf : ss-rep, Déf : rep irréductible, Ex : rep de deg 1 sont irréductibles, Prop : rep et caractère de  $V_1 \oplus V_2$ , Thm : Maschke, Lemme de Schur, Thm : Frobenius.

### 3) Outils pour la construction de tables de caractères

↔ Prop : nbre de caractères irréductibles = nbre de classes de conj, Déf : table de caractères, Prop : rep isomorphes + caractères irréductibles forment une base +  $\chi$  irréductible  $\Leftrightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1$ , Cor : formule de Burnside +  $\sum_{W \in \text{Irr}(G)} \dim W \cdot \chi_W(g) = 0 + W \text{ irréd} \Rightarrow W \text{ apparaît } \dim W \text{ fois dans la rep régulière.}$

## II - Etude de groupes généraux

### 1) Groupe abélien fini

↔ Prop : les caractères irréd de  $G$  sont de deg 1 et le nbre de caractères irréd est distinct de  $|G|$ , Thm :  $G$  abélien fini  $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$  où  $k, m_i \in \mathbb{N}$  et  $m_i \mid m_{i+1}$ , Ex : table de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### 2) Groupe cyclique d'ordre $n$

↔ description des  $n$  caractères irréductibles, table de caractères.

### 3) Groupes distingués

↔ Déf : noyau d'un caractère, Prop : tt ss-gpe distingué de  $G$  est de la forme  $\cap_{j \in J} \text{Ker}(\chi_j)$  avec  $J \subset \{1, \dots, m\}$ , Cor :  $G$  gpe fini simple  $\Leftrightarrow$  tt caractère irréd non trivial a un noyau trivial, App : table de caractères de  $D_4$ .

## III - Cas des groupes classiques

### 1) Groupes symétriques et alternés

↔ Table de  $\mathfrak{S}_4$ , Table de  $\mathcal{A}_4$  et interprétation géométrique avec le tétraèdre, Rq : groupes distingués de  $\mathfrak{S}_4$ .

### 2) Groupe des quaternions

↔ Prop : Si  $G$  non abélien alors nbre de caractères irréd de deg 1 de  $G$  est l'ordre de du groupe  $G/D(G)$ , Prop : multiplications dans  $H_8$ , Table de  $H_8$ , Rq :  $H_8$  et  $D_4$  ont même table de caractères mais pas isomorphes.

### 3) Groupes diédraux

↔ Description générale de  $D_n$ , table de caractères de  $D_6$  et ss-gpes distingués de  $D_6$

---

17.

- Felix Ulmer, *Théorie des groupes* (pour I, II-2-3 & III-2).
- Pierre Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre* (pour Maschke, DVPT 1, I-3 & quelques tables de caractères).
- Gabriel Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier* (pour II-1, III-2 & DVPT 2).

**18. Rapport du Jury** : Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupe de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles (a priori). Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de  $\mathcal{A}_5$  demande des renseignements de l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

# 120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications. 19 20

Cadre :

## I - Structure

### 1) Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↔ **Risler-Boyer** : Rappel (sous-groupe (sg) de  $\mathbb{Z}$ ) =  $k\mathbb{Z}$ , Déf/Prop : gpe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  et morphisme canonique, Prop : un gpe monogène est  $\cong$  à  $(\mathbb{Z}, +)$  ou un  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  donc un gpe cyclique est  $\cong$  à un  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ , Ex :  $\mathbb{U}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (**Combes**), Prop : caractérisation d'un sg de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  avec les diviseurs de  $n$ , ce qui donne un sg d'un gpe cyclique est cyclique, Ex : sg de  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , Structure d'anneau car  $n\mathbb{Z}$  idéal, Prop :  $a \wedge n = 1 \Leftrightarrow \bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \Leftrightarrow \bar{a}$  générateur de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ , Ex : générateurs de  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , Cor :  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  corps  $\Leftrightarrow n = p$  premier (alors noté  $\mathbb{F}_p$ ), Déf : indicatrice d'Euler, Rq :  $\varphi(p^\nu) = (p-1)p^{\nu-1}$ , Ex :  $\mathbb{F}_p^*$  a  $p-1$  générateurs, Prop : ( $G$  cyclique)  $\Rightarrow (\forall d \mid |G|$  il y a  $\varphi(d)$  élt d'ordre  $d$  dans  $G$ ), Ex : 1 élt d'ordre 2 dans  $\mathbb{U}_4$ , App :  $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ , Prop :  $\mathbb{F}_p^*$  est cyclique donc  $\cong (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$ , Thm : lemme chinois, C-ex :  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (**Perrin**), Cor :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \prod_{i=1}^k \mathbb{Z}/(p_i^{\alpha_i})\mathbb{Z}$ , Ex : syst de congruences, Cor :  $(n = m_1 m_2 \text{ avec } m_1 \wedge m_2 = 1) \Rightarrow ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z})^*)$ , App : si  $m \wedge n = 1$   $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .

### 2) Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↔ **Risler-Boyer** : Prop :  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  ie  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est abélien d'ordre  $\varphi(n)$ , Rq :  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  est cyclique d'ordre  $p-1$ , Prop :  $\exists$  morph de gpes  $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Leftrightarrow p \mid n$ .

### 3) Structure des groupes abéliens finis

↔ **Combes** : Prop : décomposition d'un gpe abélien fini en produit de  $\mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}$ , Cor : idem ds le cas où  $|G| = p^m$ , App :  $\exists a \in G$  tq  $\langle a \rangle = \text{ppcm}\{o(g) \mid g \in G\}$ .

## II - Arithmétique

### 1) Nombres premiers

↔ **Risler-Boyer** : Thm d'Euler, Petit thm de Fermat, Ex :  $10^{100} \equiv -10[247]$ ,  $1035125^{5642} \equiv 9[17]$ .

↔ **Gourdon** : App : chiffrement RSA, C-ex de Fermat : nombres de Carmichael.

### 2) Carrés et résidus quadratiques

↔ **Risler-Boyer** : Déf :  $\mathbb{F}_q^2$  et  $\mathbb{F}_q^{*2}$ , Prop : si  $p = 2$   $\mathbb{F}_q^2 = \mathbb{F}_q$  sinon  $|\mathbb{F}_q^2| = \frac{q+1}{2}$  et  $|\mathbb{F}_q^{*2}| = \frac{q-1}{2}$ , Critère d'Euler, Cor : si  $p \neq 2$   $-1 \in \mathbb{F}_q^2 \Leftrightarrow q \equiv 1[4]$ , App :  $\exists$  une infinité de nb premiers de la forme  $4m+1$ , Ex : 3 n'est pas un carré de  $\mathbb{F}_7$  (**Perrin**), Déf : résidu quadratique modulo  $n$ , Ex : résidu quadratique modulo 6  $\Leftrightarrow \equiv 0, 1, 3, 4[6]$ , Déf : symb de Legendre (et de Jacobi), Loi de réciprocité quadratique, Ex : 713 n'est pas un carré modulo 1009,

Thm des 2 carrés (**Perrin**).

### 3) Equations diophantiennes

↔ **Combes** : Déf : équa diophantiennes, Rq : ex de celle de Fermat, Ex : (3, 4, 5) sol de  $x^2 + y^2 = z^2$ , Ex : résoudre  $5x^2 + 3y^2 \equiv 11[13]$ , Ex : Thm de Sophie Germain (**FGN A11**).

### 4) Une application en combinatoire

↔ **Zavidovique** : Thm : Chevalley Warning, Cor : EGZ

## III - Applications aux polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$

### 1) Irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$

↔ **Perrin** : Critère d'Eisenstein, Ex :  $X^{p-1} + \dots + X + 1$  irréd sur  $\mathbb{Z}$ , Thm : réduction mod  $p$ , Ex :  $X^3 + 2014X^2 + 2015X - 13$  irréd sur  $\mathbb{Z}$ .

### 2) Polynômes cyclotomiques

↔ **Perrin** : Déf :  $n$ -ième poly cyclotomique  $\phi_n$ , Rq : unitaire et de degré  $\varphi(n)$ , Prop :  $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \phi_d$ , Ex :  $\phi_1 / \phi_2 / \phi_5$ , Prop :  $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ , Thm : Irréductibilité des poly cyclotomiques

19.

- Risler-Boyer, *Algèbre pour la licence 3 - Groupes, anneaux, corps* (pour presque tout I. et II.)
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour tout III. et 2 petits trucs)
- Combes, *Algèbre et géométrie* (pour équa dioph + des petits trucs)
- Gourdon, *Algèbre* (juste pour RSA + ex)
- Francinou, Gianella, Nicholas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1*
- Maxime Zavidovique, *Un max de Maths*

20. **Rapport du Jury** : Cette leçon, plus élémentaire, demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord  $n$  n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et les morphismes de groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.

## 121 - Nombres premiers. Applications. 21 22

Cadre : On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers.

### I - Généralités sur les nombres premiers

#### 1) Définitions et exemples

↔ Déf : nombre premier, Ex, Thm : Bezout, Thm : Gauss, Lemme d'Euclide, App :  $p \mid \binom{p}{k}$ .

#### 2) Décomposition en facteurs premiers

↔ Prop : Tout entier tq  $|n| \geq 2$  est divisible par un nombre premier, Prop :  $\mathcal{P}$  est infini, Thm fondamental de l'arithmétique, Ex de décomposition, Rq : cela mène à la déf d'anneau factoriel, App : produit Eulérien.

#### 3) Deux fonctions arithmétiques

↔ Déf : indicatrice d'Euler, Prop :  $\varphi$  est multiplicative, Prop :  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ , Prop :  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ , Déf : fonction de Möbius, Prop :  $\mu$  est multiplicative, Prop :  $0 = \sum_{d|n} \mu(d)$ , Prop : formule d'inversion de Möbius, App :  $\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$ .

#### 4) Répartition des nombres premiers

↔ Thm : Dirichlet  $\{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$  avec  $a \wedge b = 1$  contient une infinité de nombres premiers, Thm des nombres premiers.

### II - Corps finis

#### 1) Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↔ Prop :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  corps  $\Leftrightarrow n$  premier, Thm de Fermat, App : Théorème de Sophie Germain, App : chiffrement RSA.

#### 2) Théorie élémentaire des corps finis

↔ Déf : caractéristique d'un corps, Prop :  $K$  corps de car  $p \Rightarrow |K| = p^n$ , Prop : morphisme de Frobenius est un automorphisme pour les corps finis de car  $p > 0$ , Thm : 1) Il existe un corps à  $q$  éléments  $\mathbb{F}_q$  : c'est le corps de décomposition de  $X^q - X$  sur  $\mathbb{F}_p$  2) Il est unique à isomorphisme près, Thm :  $\mathbb{F}_q^*$  est cyclique isomorphe à  $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ .

#### 3) Carrés dans $\mathbb{F}_q$ ( $q = p^n$ )

↔ Prop : nombre de carrés dans  $\mathbb{F}_q$  et  $\mathbb{F}_q^*$ , Déf : symbole de Legendre, Prop : formule d'Euler, App : Théorème des deux carrés, Thm : Loi de réciprocité quadratique, Ex.

#### 4) Application à la réduction des polynômes modulo $p$

↔ Prop : critère d'Eisenstein, App :  $\Phi(X) = X^{p-1} + \dots + X + 1$ , Thm : réduction modulo  $p$ , Ex, Rq : la réciproque est fautive :  $X^4 + 1$  irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$  mais réductible sur  $\mathbb{F}_p \forall p \in \mathcal{P}$ .

### III - Théorie des groupes

#### 1) $p$ -groupes (avec $p \in \mathcal{P}$ )

↔ Déf :  $p$ -groupe, Ex, Prop : tt groupe d'ordre  $p$  est cyclique, Prop : Le centre d'un  $p$ -groupe non trivial est non trivial, Cor : tt  $p$ -groupe d'ordre  $p^2$  est abélien, Cor : tt  $p$ -groupe est résoluble.

#### 2) Théorèmes de Sylow

↔ Déf :  $p$ -sous-groupe de Sylow, Ex :  $\{A = (a_{ij} \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 0)\}$   $p$ -Sylow de  $GL_n(\mathbb{F}_p)$ , Thm de Sylow, Cor :  $S$   $p$ -Sylow de  $G$  alors  $(S \triangleleft G) \Leftrightarrow (S \text{ est l'unique } p\text{-Sylow de } G)$ , App : un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

### IV - Primalité en pratique

#### 1) Algorithmes élémentaires

↔ Algo : On teste si  $i \mid n$  pour  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ , Algo : crible d'Eratosthène.

#### 2) Un test de primalité

↔ Prop : Critère de Lehmer.

#### 3) Deux classes de nombres remarquables

↔ Nombres de Fermat, Rq : permet de caractériser les polygones constructibles, (Lem : Critère de Pépin), Nombres de Mersenne.

---

21.

- Gourdon, *Algèbre* (pour I-1-2-3, II-1 & III-1, RSA).
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (fonction de Möbius, II-2-4 & III-2, pour DVPT 2).
- Ramis-Warusefel, *Algèbre* (produit Eulérien, I-3-4).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (pour DVPT 1 & 2).
- Demazure, *Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes* (pour IV).

**22. Rapport du Jury** : Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux. Attention au choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant!). La réduction modulo  $p$  n'est pas hors sujet et constitue un outils puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation. Quelques résultats sur la géométrie des corps finis sont les bienvenus.



## 122 - Anneaux principaux. Exemples et Applications. 23 24

Cadre :  $A$  désigne un anneau commutatif unitaire intègre,  $\mathbb{K}$  un corps.

### I - Notion de principalité

#### 1) Idéaux d'un anneau

↔ **Perrin** : Déf : idéal principal, Déf : idéal premier et lien avec le quotient intègre, Ex : dans  $\mathbb{Z}$   $I = n\mathbb{Z}$  est premier  $\Leftrightarrow n = 0$  ou  $n$  premier, Déf : idéal max, Ex : dans  $\mathbb{Z}$ , Prop :  $I$  max  $\Leftrightarrow A/I$  est un corps, Prop : maximal  $\Rightarrow$  premier, C-ex : réciproque l'idéal  $(X)$  de  $\mathbb{K}[X, Y]$  est premier mais non maximal.

#### 2) Anneaux principaux

↔ **Perrin** : Déf : anneau principal, Ex :  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$ , App : définition du polynôme minimal d'un endomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev (**Gourdon**), App : définition du polynôme minimal d'un élément algébrique.

#### 3) Des exemples d'anneaux principaux : les anneaux euclidiens

↔ **Perrin** : Déf : euclidien, Ex :  $\mathbb{Z}$ , Prop : division euclidienne dans  $A[X]$  et corollaire  $\mathbb{K}[X]$  est euclidien, Thm : euclidien  $\Rightarrow$  principal.

↔ **FG** : Prop :  $A[X]$  principal  $\Leftrightarrow A$  est un corps, App :  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  principal  $\Leftrightarrow n = 1$ , App :  $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$  et  $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$  sont euclidiens donc principaux, Ex :  $\mathbb{K}[[X]]$  euclidien et donner ses idéaux et inversibles.

↔ **Perrin** : Un exemple d'anneau principal non euclidien :  $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right]$

### II - Arithmétique dans les anneaux principaux

#### 1) Divisibilité

↔ **Perrin** : Déf : divisibilité, interprétation en idéaux, Prop :  $(a) = (b) \Leftrightarrow (\exists u \in A^\times, a = bu)$ , Déf : élt associés, Déf : élt irréductible, Ex : dans  $\mathbb{Z}$ , Prop :  $p$  irréductible  $\Rightarrow (p)$  maximal parmi les idéaux propres de  $A$ , Csq : lorsque  $A$  est principal les idéaux maximaux de  $A$  sont les  $(p)$  avec  $p$  irréductible, Ex (**FG**) : irréductibles de  $\mathbb{K}[[X]]$ , App : polynôme minimal d'un élt algébrique sur  $\mathbb{K}[X]$  est irréductible, corps de rupture, Ex :  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ .

#### 2) Anneaux factoriels

↔ **Perrin** : Déf : système de représentants, Déf : anneau factoriel, Ex : dans  $\mathbb{Z}$ , Ex : dans  $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$   $3 \times 3 = (2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})$  donc pas factoriel, Prop :  $A$  intègre et vérifiant existence de la décomposition alors  $[A$  factoriel]  $\Leftrightarrow$  [lemme d'Euclide]  $\Leftrightarrow$  [ $p$  irréd  $\Leftrightarrow p$  premier]  $\Leftrightarrow$  [théorème de Gauss], Cor : principal  $\Rightarrow$  factoriel, C-ex :  $\mathbb{Z}[X]$  factoriel mais non principal, Déf : ppcm et pgcd, Rq : ppcm et pgcd définis à élément inversible près.

#### 3) Le théorème de Bezout et conséquences

↔ **Perrin** : Prop :  $A$  principal et  $d = \text{pgcd}(a, b)$  alors  $(d) = (a) + (b)$ , Cor (Bezout) :  $a$  et  $b$  premiers entre eux  $\Leftrightarrow$  il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tq  $1 = \lambda a + \mu b$ , C-ex : dans  $k[X, Y]$  qui est factoriel non principal  $(X) + (Y) = (X, Y) \neq 1$ , (Prop : si  $A$  principal et  $p \in A$  alors [ $p$  irréd]  $\Leftrightarrow$  [( $p$ ) est max]  $\Leftrightarrow$  [( $p$ ) est premier]  $\Leftrightarrow$  [ $A/(p)$  est un corps])

↔ **FG** : Prop : un anneau factoriel qui vérifie Bézout est principal.

#### 4) Lemme chinois

↔ **Combes** : Thm chinois, un ex de calcul.

↔ **OA** : Thm chinois appliqué au polynôme minimal, App :  $\pi_u$  scindé à racines simples alors  $u$  diagonalisable.

### III - Entiers d'un corps quadratique

↔ on se place ici dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  où  $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$  sans facteur carré

#### 1) Généralités

↔ **Combes** : Déf : norme + trace + entier de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , notation  $\mathcal{A}_d + c'$  est un anneau, sa forme selon la congruence de  $d \pmod{4}$ , Prop : CNS pour que la norme soit un stathme quand  $d < 0$ .

#### 2) L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss

↔ **Perrin** : Déf :  $\mathbb{Z}[i]$ , Prop : inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ , Déf :  $\Sigma$ , Prop :  $\Sigma$  stable par multiplication, Prop :  $\mathbb{Z}[i]$  euclidien donc principal, Thm des deux carrés

---

23.

- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour quasi tout)
- Combes, *Algèbre et Géométrie* (pour théorème chinois)
- Szpirglas, *Algèbre L3* (pleins d'exemples)
- Beck, *Objectif agrégation* (pour Algèbre linéaire)
- Francinou, Gianella, *Algèbre 1* (pour un ex et un dvpt)

**24. Rapport du Jury** : Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que  $\mathbb{Z}$  et  $k[X]$  (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications. On peut donner des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. A ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. On a pu noter dans cette leçon l'erreur répandue que  $1+i$  et  $1-i$  sont des irréductibles premiers entre eux dans l'anneau factoriel  $\mathbb{Z}[i]$ .



## 123 - Corps finis. Applications. 25 26

Cadre :

### I - Généralités sur les corps finis

#### 1) Caractéristique et sous-corps premier

↔ Rq :  $K$  et  $L$  ss-corps finis et  $\dim_K(L) = n$  alors  $|L| = |K|^n$ , Déf : ss-corps premier, Déf : caractéristique, Rq :  $\forall x \in K \text{ car}(K)x = 0$  et  $K$  fini  $\Rightarrow \text{car}(K) = p > 0$ , Prop :  $\text{car}(K) = p > 0$  et  $K$  fini  $\Rightarrow K$  est un  $\mathbb{F}_p$  ev de dim finie, le cardinal d'un corps fini est  $p^n$  avec  $p$  premier, Ex : pas de corps à 6 élts, Prop/Déf : morphisme de Frobenius, Prop : Fermat, App : test de non-primalité.

#### 2) Existence et unicité des corps finis

↔ Thm :  $\exists!$  corps à  $q$  éléments comme corps de décomposition de  $X^q - X$  sur  $\mathbb{F}_p$  à isom près, Prop :  $\mathbb{F}_{p^n}$  admet un ss-corps de cardinal  $p^d \Leftrightarrow d|n$ , Ex : ss-corps de  $\mathbb{F}_{16}$ .

↔ Construction de  $\mathbb{F}_{p^n}$  comme  $\mathbb{F}[X]/(P)$   $P$  irred de deg  $n$ , Ex :  $\mathbb{F}_8$ .

#### 3) Structure de $\mathbb{F}_q^*$

↔ Prop :  $\mathbb{F}_q^*$  cyclique isomorphe à  $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ , Rq : on ne connaît pas en général les générateurs de  $\mathbb{F}_q^*$ , Ex : générateurs de  $\mathbb{F}_8^*$ , Thm : de l'élément primitif, Rq : Si  $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[\alpha] \Rightarrow \alpha$  générateur de  $\mathbb{F}_{p^n}$ .

### II - Les carrés dans $\mathbb{F}_q$

#### 1) Définition et caractérisation

↔ Déf : carrés dans  $\mathbb{F}_q$  et  $\mathbb{F}_q^*$ , Prop : nbre de carrés dans  $\mathbb{F}_q$  et  $\mathbb{F}_q^*$ , Prop :  $x \in \mathbb{F}_q^{*2} \Leftrightarrow x^{(q-1)/2} = 1$ , Cor :  $-1$  carré dans  $\mathbb{F}_q \Leftrightarrow q \equiv 1[4]$ , App : Théorème des 2 carrés

#### 2) Symboles de Legendre

↔ Déf : Symbole de Legendre, Prop : Formule d'Euler, Cor :  $\left(\frac{nn'}{p}\right)$ , Thm : Loi de réciprocité quadratique, Ex :  $\left(\frac{5}{19}\right)$ , (Déf : Symbole de Jacobi, Rq : Jacobi ne caractérise pas les carrés)  $\leftarrow$  à connaître

### III - Polynômes sur un corps fini

#### 1) Polynômes irréductibles sur les corps finis

↔ Prop : un corps fini n'est jamais alg clos, Ex :  $P = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (X-a) + 1 \in \mathbb{F}_q[X]$ , Prop :  $\cup_{n \geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$  clôture alg de  $\mathbb{F}_q$ , Déf :  $A(n, q)$  pol irr unitaire de deg  $n$  de  $\mathbb{F}_q$  et  $I(n, q) = |A(n, q)|$ , Prop :  $P \in A(d, q)$  on a  $P | X^{q^n} - X \Leftrightarrow d | n$ , Prop :  $X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in A(d, p)} P$ , Prop :  $\exists$  pol irr de tout degré dans  $\mathbb{F}_q$ , Ex :  $X^p - X - 1$  irr sur  $\mathbb{F}_p$ , Prop :  $P \in \mathbb{F}_p[X]$  de deg  $n$  est irréd  $\Leftrightarrow$  pas de racine dans toutes les extensions de degré  $\leq n/2$ , Ex :  $X^4 + X + 1$ , Prop :  $X^4 + 1$  irr sur  $\mathbb{Z}$  mais red sur  $\mathbb{F}_p \forall p$  premier, Irréductibles de  $\mathbb{F}_q$

#### 2) Nombre de solutions d'équations sur $\mathbb{F}_q$

↔ Chevalley-Waring, App : forme quadra sur  $\mathbb{F}_q$  en au moins 3 variables admet un zéro non trivial.

### IV - Algèbre linéaire et bilinéaire

#### 1) Groupe linéaire sur $\mathbb{F}_q$

↔ Déf :  $PGL$  et  $PSL$ , Prop :  $Z(GL)$  et  $Z(SL)$ , Prop : cardinaux de  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ ,  $SL_n(\mathbb{F}_q)$ ,  $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ ,  $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ , App : Existence d'un  $p$ -Sylow de  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ , Prop : Isomorphismes exceptionnels

#### 2) Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$

↔ Prop : solutions de  $ax^2 + by^2 = 1$  dans  $\mathbb{F}_q$ , Classification des formes quadratiques sur  $\mathbb{F}_q$ .

---

25.

- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour presque tout)
- Michel Demazure, *Cours d'algèbre* (pour Fermat & II-2)
- Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1* (III-1 et quelques exemples)
- Maxime Zavidovique, *Un max de math* (III-2)
- (Beck, Malick, Peyre, *Objectif agrégation*, 2ème édition (pour Frobenius-Zolotarev).

**26. Rapport du Jury :** Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers  $\mathbb{F}_q$  doivent être connues. Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis (y compris pour  $\mathbb{F}_q$  avec  $q$  non premier!) ne doivent pas être négligées. Citons par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.

## 124 - Anneau des séries formelles. Applications. 27 28

Cadre :  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif de caractéristique nulle.

### I - L'anneau $\mathbb{K}[[X]]$

#### 1) Structure de l'ensemble des séries formelles.

↔ **Saux-Picart** : Déf :  $\mathbb{K}[[X]]$ , Prop :  $\mathbb{K}[[X]]$  anneau commutatif intègre, Rq : écriture sous la forme d'une série, Prop : A inversible  $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$ , Ex :  $1 - X$ , Prop : morph inj d'anneau entre  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{K}[[X]]$ , Rq : identification des fractions rationnelles à des séries formelles, Ex : dans **ADF**, Déf : valuation, Ex :  $1-X$ , Prop : A inversible  $\Leftrightarrow v(A) = 0$ , Prop :  $v(A + B) \geq \min(v(A), v(B))$ ,  $v(A.B) = v(A) + v(B)$ ,

↔ **FG** : Prop : idéaux de  $\mathbb{K}[[X]]$  et  $\mathbb{K}[[X]]$  principal, Prop :  $\mathbb{K}[[X]]$  anneau euclidien.

#### 2) Opérations

↔ **AF** : Déf : sommable et somme d'une famille, Rq :  $(a_i X^i)$  sommable justifie la notation sous forme de série, Ex :  $v(S) \geq 1$  alors  $(b_n S^n)$  sommable, Déf : composée, Prop :  $v(U \circ S) \geq v(U)v(S) + \text{composée} = \text{morphisme d'anneaux de } \mathbb{K}[[X]] + \text{associativité de la composée}$ , Ex :  $1 - S$  avec  $v(S) \geq 1$ , App : polynômes de Tchebychev de 2nde espèce.

↔ **Saux-Picart** : Déf : série formelle dérivée, Prop :  $A' = A \in \mathbb{K} + (AB)' = A'B + AB' + (A^{-1})' = -A'.A^{-2} + (v(A) \geq 1) \Rightarrow ((B \circ A)' = A' \circ B' \circ A)$ .

#### 3) Quelques exemples dans $\mathbb{C}[[X]]$

↔ **AF** :  $\exp(X), \sin(X), \ln(1 + X), (1 + X)^\alpha$

### II - Séries génératrices et suites récurrentes linéaires

#### 1) Séries génératrices

↔ **Saux-Picart** : Déf : série génératrices, Ex et une app, partition d'un entier en parts fixées (**FGN An2**), Formules de Newton (**FG**), Thm de Molien (**Leichtnam**).

#### 2) Dénombrement

↔ **AF** : Dénombrement dans  $S_n$  (nombre de dérangements et d'involutions).

↔ **FGN A11** : Nombres de Bell.

#### 3) Suites récurrentes linéaires

↔ **Saux-Picart** : Déf : suite récurrence linéaire d'ordre  $k$ , Prop :  $S \in \text{Im}(\psi) \Leftrightarrow (s_n)_n$  est récurrente linéaire à partir d'un certain rang, Ex : suite de Fibonacci.

### III - Equations différentielles dans $\mathbb{K}[[X]]$

#### 1) Suites P-récurrentes et séries $\Delta$ -finies.

↔ **Saux-Picart** : Déf : suite P-récurrente, Ex : suite qui fournit la série exp, Déf : série  $\Delta$ -finie, Ex :  $\exp(X)$ , Prop :  $(s_n)_n$  est P-récurrente  $\Leftrightarrow S$  est  $\Delta$ -finie, Corolaire : solutions d'une equa diff, Ex.

#### 2) Application aux nombres de Catalan

↔ **Saux-Picart** : détailler la démarche, Nombres de Catalan

---

27.

- Arnaudiès, Delezoïde, Fraysse, *Exercices résolus d'algèbre du cours de mathématiques 1* (pour exemples)
- Arnaudiès, Fraysse, *Cours de mathématiques 1, Algèbre* (pour I-2-3 & II-2)
- Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1* (pour I-1 et formules de Newton)
- Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques Polytechnique-ENS Algèbre et Géométrie* (Molien)
- Saux-Picart, *Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux* (pour I-1, II-1-3 & III)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 2* (Partition d'un entier en parts fixées)
- Francinou, Gianella, Nicolas *Oraux X-ENS, Algèbre 1* (Nombres de Bell)

28. **Rapport du Jury** : C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, etc. (+rq sur dvlp de Molien, interprétation sur exemples simples)

# 125 - Extensions de corps et applications. 29 30

Cadre : Lorsque cela n'est pas précisé,  $k$ ,  $\mathbb{K}$  et  $L$  désignent des corps.

## I - Corps et extensions de corps

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Gozard** : Déf : corps, Ex :  $\mathbb{Q} \mathbb{R} \mathbb{C} \text{Frac}(A) \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , Déf : caractéristique d'un corps  $\mathbb{K}$  notée  $\text{car}(\mathbb{K})$  + elle est nulle ou égale à  $p$  premier, Ex :  $\text{car}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}) = 0$  et  $\text{car}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$ , Prop :  $\mathbb{K}$  fini  $\Rightarrow \text{car}(\mathbb{K}) \neq 0$ , Rq : réciproque fautive prendre  $\mathbb{F}_p(X)$ , Déf : extension de corps notée  $\mathbb{K}/k$ , Rq : si  $k$  ss-corps de  $\mathbb{K}$  alors  $\mathbb{K}$  extension de  $k$ , Ex :  $\mathbb{C}/\mathbb{R} + k(T)/k$ , Déf : degré extension noté  $[K : k]$ , Ex :  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2 + [\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = +\infty$ , Thm : base télescopique, Cor : multiplicativité des degrés, (App :  $K$ -automorphismes de  $K(X)$  (**Spirzglas**)).

### 2) Extension algébrique

↔ **Gozard** : Prop/Déf : extension engendrée par une partie :  $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , Déf : extension monogène, Rq : élément primitif, Déf : élt algébrique sur  $k$  + polynôme minimal de  $a$  algébrique noté  $\text{Irr}(a, k, X)$  + élt transcendant sur  $k$ , Ex :  $a \in k \Leftrightarrow \text{Irr}(a, k, X) = X - a$ , Prop :  $P \in \mathbb{K}[X]$  ( $P$  polynôme min de  $a$ )  $\Leftrightarrow$  ( $P$  unitaire,  $P(a) = 0$  et  $P$  irréductible ds  $\mathbb{K}[X]$ ), Ex : ds  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$   $\text{Irr}(2^{1/n}, \mathbb{Q}, X) = X^n - 2$ , Thm : structure des extensions monogènes, Ex :  $(1, \sqrt{2})$  base de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ , Cor : ( $a$  alg sur  $\mathbb{K}$ )  $\Leftrightarrow$  ( $a^{-1} \in \mathbb{K}[a]$ ), Prop :  $\mathbb{K} \subset L$  alors ensemble des élt de  $L$  alg sur  $\mathbb{K}$  = ss-corps de  $L$  contenant  $\mathbb{K}$ , Déf : extension algébrique, Prop : tte extension  $\mathbb{K}$  de degré fini de  $k$  est algébrique sur  $k$ , Rq : réciproque fautive! Prendre  $k = \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{K} = \{\text{élt algébriques sur } \mathbb{Q}\}$ .

## II - Adjonction de racines

### 1) Corps de rupture

↔ **Gozard** : Déf : corps de rupture, Ex : si  $\text{deg}(P) = 1$   $\mathbb{K}$  est un corps de rupture de  $P$ , Thm : unicité des corps de rupture à  $\mathbb{K}$ -isomorphisme près, Ex : construction de  $\mathbb{C} + \mathbb{F}_2(j)$  + corps cyclotomique.

### 2) Corps de décomposition

↔ **Gozard** : Déf : corps de décomposition, Thm : unicité des corps de décomposition à  $\mathbb{K}$ -isomorphisme près, Ex :  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$  = corps de décomp de  $X^3 - 2$  et  $\mathbb{R}(i)$  = corps de décomp de  $X^2 + 1$ , Thm : existence et unicité des corps finis à  $q = p^n$  élt, Thm de l'élément primitif

### 3) Clôture algébrique

↔ **Gozard** : Prop/Déf : algébriquement clos, Ex :  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas algébriquement clos, Prop : tt corps alg clos est infini, Thm d'Alembert-Gauss, Cor : description des poly irréd de  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$ , Déf : clôture algébrique, Ex : clôture alg de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{F}_p$ , Thm de Steinitz [admis].

## III - Applications

### 1) Polynômes irréductibles

↔ **Perrin** : Prop : ( $P$  irréd sur  $k$ )  $\Leftrightarrow$  (pas de racines dans tte extension  $\mathbb{K}$  tq  $[\mathbb{K} : k] \leq \frac{n}{2}$ ), App :  $X^4 + 1$  irréd sur  $\mathbb{Z}$  mais réd dans  $\mathbb{F}_p$  pour tout  $p$  premier, Thm :  $P \in k[X]$  irréd de  $\text{deg } n$  et  $\mathbb{K}/k$  de  $\text{deg } m$  tq  $\text{pgcd}(m, n) = 1$  alors  $P$  est encore irréd sur  $\mathbb{K}$ , Ex :  $X^3 + X + 1$  irréd sur  $\mathbb{Q}(i)$  / si  $X^3 + X + 1$  n'a pas de racines dans  $\mathbb{F}_p$  irréd sur  $\mathbb{F}_{p^n}$  si  $3 \nmid n$ , Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$  (**FG**), Rq : il existe des poly irréd de tt  $\text{deg}$  sur  $\mathbb{F}_q$ .

### 2) Construction à la règle et au compas

↔ **Gozard** :  $\mathcal{P}$  désigne ici un plan affine euclidien, Déf : point constructible en un pas à partir de  $X \subset \mathcal{P}$ , déf : point constructible, Déf : nombre constructible, Ex : tt élément de  $\mathbb{Q}$  est constructible, Thm : l'ensemble  $\mathbb{E}$  des nombres réels constructibles est un ss-corps de  $\mathbb{R}$  stable par racine carrée, Thm de Wantzel, App : impossibilité de la duplication du cube, Déf : polygones constructibles, App : construction du pentagone, Thm de Gauss Wantzel

---

29.

- Gozard, *Théorie de Galois* (pour I, II & III-2)
- Perrin, *Cours d'Algèbre* (III-1)
- Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation* (pour polynômes irréductibles de  $\mathbb{F}_q$ )

**30. Rapport du Jury** : Très peu de candidats ont choisi cette leçon. On doit y voir le théorème de la base télescopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon.

## 126 - Exemples d'équations diophantiennes. 31 32

Motivations : Date du 3ème siècle après JC avec Diophante.

Déf : equation diophantienne (**Samuel ou Combes**). Rq historique sur eq de Fermat.

### I - Equations du premier degré

1) En 2 variables :  $ax + by = c$

↔ **1001** : Prop : existence et forme des solutions, Ex.

↔ Système d'équations modulaires : Cas de deux équations modulo des nombres non premiers entre eux (**1001**), Thm chinois dans ce cas (**Nourdin**), Méthode et ex (**Combes**).

2) En  $n$  variables

↔ **Berhuy** : Existence et forme des solutions, Ex, Partition d'un entier en parts fixées

### II - Méthodes pratiques de résolution

1) Méthode géométrique

↔ **Combes** : Explication de la méthode, Ex des triangles pythagoriciens et du cercle, Ex du Follium de Descartes.

2) Descente infinie

↔ **Samuel + Combes** : Principe de la méthode

↔ **Combes + 1001 + FGNa11** : Des ex dont Fermat pour  $n = 4$  (attention, se sert des triplets pythagoriciens si on fait cette version), Théorème de Sophie Germain

3) Réduction modulaire

↔ **1001** : Plein d'ex + exo du **Combes** qui utilise en plus la descente infinie.

### III - Utilisation des corps quadratiques

1) Introduction

↔ **Duverney** : Introduction du corps quadratique  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  où  $d \in \mathbb{Z}$  sans facteur carré, Déf : norme + entier, Ex : nbre d'or sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , Déf : anneau des entiers, Prop : anneau des entiers par rapport à  $d$  [4], Déf : unités, Thm : anneau des entiers en fonction de l'unité fondamentale.

2) Equation de Pell  $x^2 - dy^2 = 1$

↔ **Duverney** : Thm : l'équation a une infinité de solution (admis), Thm : les solutions en fonction d'une solution fondamentale (plus petite non triviale), Ex : pour  $d = 19$ .

3) Cas où l'anneau des entiers est euclidien

↔ **Duverney** : Prop :  $A_{\mathbb{K}}$  est euclidien pour  $d = \dots$

↔ **Duverney** :  $d = -1$  Thm des deux carrés, équation de Mordell, une autre équation (**Nourdin**).

↔ **Nourdin** :  $d = -2$  Ex.

---

31.

- Nourdin, *Oral agrégation*
- Combes, *Groupe et géométrie*
- De Koninck / Mercier, *1001 problèmes en théorie classique des nombres* (♥ plein d'ex)
- Duverney, *Théorie des nombres*
- Berhuy, *Modules : théorie, pratique ... et un peu d'arithmétique*
- Samuel, *Théorie algébrique des nombres*
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (un ex)

**32. Rapport du Jury** : Il s'agit d'une leçon nouvelle ou plus exactement d'une renaissance. On attend là les notions de bases servant à aborder les équations de type  $ax + by = d$  (identité de Bezout, lemme de Gauss), les systèmes de congruences, avec le lemme des noyaux. A ce sujet, il est important que le candidat connaisse l'image du morphisme du lemme des noyaux lorsque les nombres ne sont pas premiers entre eux. On attend bien entendu la méthode de descente et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier  $p$ . La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour  $n = 2$ , ou pour les nombres premiers de Sophie Germain).

# 127 - Droite projective et birapport. 33

34

Cadre :  $\mathbb{K}$  est un corps

## I - Droite projective sur un corps quelconque

### 1) Construction de la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$

↔ **H2G2** : Déf : droite projective comme l'ensemble des droites vectorielles ie le quotient  $\mathbb{K}^2 - \{0\}/\mathbb{K}^*$ , Notation :  $[x, y]$ , Descriptions de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  comme  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$  (dessin) et comme  $GL_2(\mathbb{K})/T$  ou  $T$  est l'ens des matrices triang sup inversibles.

### 2) Considérations topologiques de la droite projective pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

↔ **H2G2** : Trois façons de mettre une topologie sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ , Prop : le droite projective est compacte et  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  (resp  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ) est homéomorphe à  $S^1$  (resp à  $S^2$ ) (dessin).

## II - Action de $PGL_2(\mathbb{K})$ et birapport

### 1) Homographies

↔ **Audin** : Déf : homographie, Rq :  $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  ne définit pas toujours une application de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ , Prop : les homographies de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  dans lui-même forment un groupe noté  $GP(\mathbb{K}^2)$ , Rq :  $GP(\mathbb{K}^2)$  est isomorphe à  $PGL_2(\mathbb{K}) = GL_2(\mathbb{K})/\{\text{homothéties}\}$ , Expression d'une homographie comme  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , Thm : isomorphisme entre  $PGL_2(\mathbb{K})$  et les automorphismes de  $\mathbb{K}(X)$  (**Szp**), Réécriture de l'action de  $GL_2(\mathbb{K})$  sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  (**H2G2**), Prop : Eléments qui engendrent  $PGL_2(\mathbb{C})$ , Rq : Une homographie a entre 0 et 2 points fixes (**H2G2**). App : toute homographie complexe a un point fixe. Contre exemple sur  $\mathbb{R}$ . App : deux homographies ayant chacune deux points fixes commutent ssi elles ont les mêmes points fixes. App : l'ensemble des homographies qui préservent deux points distincts est isomorphe à  $\mathbb{K}^*$ . Ex : si  $f$  préserve 0 et  $\infty$ , alors  $f(z) = az$ . Prop : l'action de  $PGL_2(\mathbb{K})$  sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  est trois fois simplement transitive (**H2G2**).

### 2) Birapport

↔ **Audin** : Déf : birapport, Des exemples, Rq : pour  $k \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  il existe un unique point  $d$  tel que  $[a, b, c, d] = k$ .

↔ **H2G2** : Prop : invariance du birapport par homographie ; égalité des birapport  $\Leftrightarrow$  il existe une homographie qui envoie les points d'un birapport sur ceux de l'autre birapport ; formule du birapport avec les quotients, Un exemple, Rq : si on fixe trois des variables le birapport est une homographie en la dernière variable.

## III - Applications

### 1) Dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

↔ **Audin** : Prop : relations entre birapports pour quatre points alignés distincts, Prop : le birapport de quatre points de  $\mathbb{C}$  alignés sur une droite affine réelle contenue dans  $\mathbb{C}$  coïncide avec leur birapport comme points de la droite affine complexe, Prop : sur  $\mathbb{C}$  quatre points sont alignés ou cocycliques  $\Leftrightarrow$  leur birapport est réel. Cor : une homographie de la droite proj complexe préserve les cercles et droites.

↔ **H2G2** : Prop : formule des six birapports, Rq : en général on montre que 5 des 6 birapports sont réels et on en déduit que le 6ième l'est.

↔ **Audin** : Ex : théorème de Miquel (dessin), Ex : le droite de Simson (dessin), Ex : la droite de Steiner, Ex : le pivot (dessin).

### 2) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ : isomorphismes exceptionnels

↔ **H2G2** : Prop : cardinaux de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ ,  $GL_n(\mathbb{K})$ ,  $PGL_n(\mathbb{K})$ ,  $PSL_n(\mathbb{K})$ , Thm : isomorphismes exceptionnels.

---

33.

- Caldero, Germoni, *H2G2*
- Audin, *Géométrie*
- Szpirglas, *Algèbre L3* (pour les automorphismes de  $\mathbb{K}(X)$ ).

**34. Rapport du Jury** : Le birapport peut être vu comme un invariant pour l'action de  $PGL_2(\mathbb{K})$  sur l'ensemble  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  des droites de  $\mathbb{K}^2$ . Sur  $\mathbb{C}$ , il faut en voir les applications à la cocyclicité et à l'étude des droites et cercles du plan affine euclidien. On peut s'aider du birapport, sur des corps finis, afin de construire des isomorphismes classiques entre groupes finis de petit cardinal. L'ensemble des droites du plan contenant un point fixe est naturellement une droite projective. Cela permet enfin d'identifier une conique ayant au moins un point à une droite projective : c'est l'idée d'une preuve classique du théorème de l'hexagramme de Pascal. Par ailleurs, on pourra remarquer le birapport dans l'expression de la distance hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré.

# 140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications. 35 36

Cadre :  $\mathbb{K}$  un corps commutatif,  $F$  désigne un élément de  $\mathbb{K}(X)$ .

## I - Le corps des fractions rationnelles

### 1) Construction de $\mathbb{K}(X)$

↔ Thm/Déf : corps  $\mathbb{K}(X)$ , Prop : addition et multiplication dans  $\mathbb{K}(X)$ , Prop : structure de  $K$ -algèbre de  $\mathbb{K}(X)$ , Thm :  $K, K'$  deux corps commutatifs isomorphes  $\Rightarrow$  existence et unicité d'un isomorphisme  $\psi$  entre  $K(X)$  et  $K'(Y)$  tq  $\psi(X) = Y$ , Thm/Déf : forme irréductible de  $F$ , Prop/Déf : degré de  $F$ , Prop : degré de l'addition et multiplication, App :  $\mathbb{K}(X)$  n'est pas algébriquement clos.

### 2) Racines et pôles

↔ Déf : pôle d'ordre  $k$  et racine d'ordre  $k$  de  $F$ , Rq : aucun élément de  $\mathbb{K}$  n'est racine et pôle de  $F$ , Rq :  $F$  peut ne pas avoir de racines (resp. pôles) dans  $\mathbb{K}$  mais en avoir dans  $L$  (extension de  $\mathbb{K}$ ), Ex : avec  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , Prop :  $\boxed{\text{Automorphismes de } \mathbb{K}(X)}$ , Déf : fonction rationnelle notée  $\tilde{F}$ , Thm : si  $\mathbb{K}$  infini et si  $\tilde{F}, \tilde{G}$  coïncident sur l'intersection de leur dom de déf  $\Rightarrow F = G$ , C-ex : dans  $\mathbb{F}_p$ .

### 3) Dérivation

↔ Thm/Déf : dérivée de  $F$ , Prop : formules de dérivation, Thm : En car 0 ( $F' = 0$ )  $\Leftrightarrow$  ( $F$  constante), C-ex : dans  $\mathbb{F}_p \left(\frac{1}{X^p}\right)' = 0$ .

## II - Décomposition en éléments simples

### 1) Partie entière et partie polaire

↔ Déf : partie entière, Rq : on l'obtient par division euclidienne, Déf : élément simple, Thm : de décomposition en éléments simples, **Cas d'un corps alg clos** : Thm : écriture plus simple de la décomposition, Ex : dans  $\mathbb{C}(X)$ , Déf : partie polaire, App : décomposition de  $\frac{P}{Q}$  + thm de Lucas, **Cas de  $\mathbb{R}$**  : Thm : écriture de la décomposition avec élts de 1ère et 2ème espèce, Ex :  $\frac{1}{X(X^2+1)}$ , App : calcul de l'intégrale sur  $[1, +\infty[$ .

### 2) Résidus

↔ Déf : résidu du pôle  $\alpha$  d'ordre  $n$  :  $\text{Res}(F, \alpha)$ , Prop :  $\mathbb{K}$  alg clos alors ( $\deg(F) < 1$ )  $\Rightarrow$  ( $\sum \text{Res}(F, \alpha) = 0$ ), Prop :  $\mathbb{K}$  alg clos et  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$  alors l'image de  $\varphi : F \mapsto F'$  est  $\{F \text{ dont tous les résidus sont nuls}\}$ , Prop : calcul de  $\text{Res}(F, \alpha)$ , Thm : des résidus, Ex : calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^6}$ .

### 3) Calcul pratique de la décomposition

↔ Thm : calcul des coeff par division euclidienne, Ex, Prop : si  $F = \frac{P}{Q}$  a un pôle simple en  $a \Rightarrow$  le coeff devant  $\frac{1}{X-a}$  est  $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ , Ex :  $\frac{1}{X^4+1}$ , Rq : détermination des termes de la forme  $\frac{\beta_j X + \gamma_j}{(X^2 + pX + q)^j}$ .

## III - Séries formelles et fractions rationnelles

1) ↔ Thm/Déf : série formelle, Thm :  $F$  développable en série formelle  $\Leftrightarrow F$  n'admet pas 0 pour pôle, il y a alors unicité du dvpt, Ex :  $\frac{1}{1-X}$  et  $\frac{1}{(1-X)^p}$ , C-ex :  $\ln(X) \notin \mathbb{K}(X)$ , App : Partition d'un entier en parts fixées

35.

- Amar Matheron, *Analyse complexe* (pour expression du résidu).
- Ramis, Deschamps, Odoux, *Cours de mathématiques de spéciales* (pour I, II-1 & III).
- Tauvel, *Algèbre*, 2ème édition (pour quelques exemples et II-2).
- Francinou, Gianella, Nicolas *Oraux X-ENS Algèbre 1* (pour DVPT 1).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2* (pour DVPT 2).

**36. Rapport du Jury** : Le bagage théorique est somme toute assez classique, même si parfois le candidat ne voit pas l'unicité de la décomposition en éléments simples en terme d'indépendance en algèbre linéaire. Ce sont surtout les applications qui sont attendues : séries génératrices (avec la question clé : à quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle?), automorphisme de  $\mathbb{K}(X)$ , version algébrique du théorème des résidus, action par homographies. Le théorème de Luroth n'est pas obligatoire et peut même se révéler dangereux si le candidat n'est pas suffisamment préparé aux questions aux questions classiques qui l'attendent.

# 141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications. 37 38

Cadre :  $A$  un anneau intègre (**puis factoriel à partir du I.2.**).  $K$  un corps et  $L/K$  une extension.  $\alpha \in L$ .

## I - Polynômes irréductibles

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ Déf : polynôme irréductible, Prop : sur  $K[X]$  tout poly de deg 1 est irred + tout poly irréd de degré  $> 1$  n'a pas de racines dans  $K$  + les poly irréd de deg 2 ou 3 sont exactement ceux qui n'ont pas de racines ds  $K$ , C-ex :  $(X^2 + 1)^2$  pas de racines dans  $\mathbb{Q}$  mais réd sur  $\mathbb{Q}[X]$ , C-ex :  $2X$  réd sur  $\mathbb{Z}$  mais irréd sur  $\mathbb{Q}$ , Prop : Dans  $K[X]$   $P$  irréd  $\Leftrightarrow (P)$  maximal  $\Leftrightarrow K[X]/P$  corps, C-ex :  $X^2 + 1$  irréd dans  $\mathbb{Z}[X]$  mais  $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$  non corps.

### 2) Factorialité et irréductibilité

↔ Déf : anneau factoriel, Déf : contenu, Déf : primitif, Lemme de Gauss :  $c(PQ) = c(P)c(Q)$  modulo  $A^*$ , Prop : les poly irréd de  $A[X]$  sont les cstes et les poly de deg  $\geq 1$  primitifs et irréd sur  $\text{Frac}(A)$ , Prop : un poly est irréd sur  $A \Leftrightarrow$  il l'est sur  $\text{Frac}(A)$  et s'il est primitif, Ex : les poly unitaires de deg  $\geq 1$  sont irréd sur  $\mathbb{Z} \Leftrightarrow$  ils le sont sur  $\mathbb{Q}$ , Thm :  $A$  factoriel  $\Rightarrow A[X]$  factoriel, App : Lemme des noyaux.

### 3) Éléments algébriques et polynôme minimal

↔ Déf : élt algébrique  $\alpha$  + poly minimal  $P_\alpha$ , Ex :  $\sqrt{2}$  dans  $\mathbb{Q}$  de poly min  $X^2 - 2$ , Thm :  $\alpha$  algébrique  $\Leftrightarrow K[\alpha] = K(\alpha) \Leftrightarrow [K[\alpha] : K] < \infty$  + En fait,  $[K[\alpha] : K] = \deg P_\alpha$ , Déf : degré d'un élément, Rq :  $K[X]/(P_\alpha) \simeq K[\alpha]$ , Déf : extension algébrique.

### 4) Critères d'irréductibilité : cas général

↔ Thm : critère d'Eisenstein, Ex :  $p$  premier  $\Rightarrow X^{p-1} + \dots + X + 1$  irréd sur  $\mathbb{Z}$ , Ex :  $X^4 + 1$  irréd sur  $\mathbb{Z}$  mais réd sur  $\mathbb{F}_2$ , Thm : critère de réduction mod  $p$ , Rq : on l'utilise svnt sur  $\mathbb{Z}$  avec  $\mathbb{F}_p$ , Ex :  $X^3 + 2014X^2 + 13X - 21$  irréd sur  $\mathbb{Z}$ .

## II - Adjonction de racines (sur les $K[X]$ )

### 1) Corps de rupture d'un polynôme

↔ Déf : corps de rupture (CR), Ex : si  $\deg(P) = 1$   $K$  CR de  $P$ , Thm : existence et pseudo-unicité du CR, Rq : deg du CR cme extension = deg du poly + base de  $K(\alpha)$ , Ex : construction de  $\mathbb{C} : \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ , Ex : construction d'un corps à 4 élt  $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ , Prop :  $P$  irréd  $\Leftrightarrow P$  n'a pas de racines ds les extensions de deg  $\leq \deg(P)/2$ , App :  $X^4 + 1$  réd sur tout  $\mathbb{F}_p$ , Prop : si  $L$  est de deg  $m$  sur  $K$  avec  $m \wedge \deg(P) = 1$  alors  $P$  irréd dans  $L[X]$ .

### 2) Corps de décomposition d'un polynôme

↔ Déf : corps de décomposition (CD), Ex :  $K$  pour les poly de deg 1, Rq : un CR peut être un CD (mais pas forcément !), Ex :  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$  CD sur  $\mathbb{R}$  de  $X^2 + 1$ , Thm : existence et pseudo-unicité du CD (+notation  $D_K(P)$ ), Ex :  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  CR de  $X^3 - 2$  sur  $\mathbb{Q}$  mais  $\subsetneq D_{\mathbb{Q}}(P) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ , Thm de l'élt primitif, **Cas des corps finis** Thm : existence et pseudo-unicité de  $\mathbb{F}_{p^n}$ , Rq : conservation du Frobenius, Thm :  $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p/(\Pi)$  où  $\Pi$  irréd quelconque de deg  $n$  sur  $\mathbb{F}_p$ , Ex :  $\mathbb{F}_4$  et  $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ , Cor : il existe des poly irréd de tt degré sur  $\mathbb{F}_p$ , Cor : pour les poly irréd de  $\mathbb{F}_p$  CR=CD, Déf : fonction  $\mu$  de Möbius, Prop : Irréductibles de  $\mathbb{F}_q$ .

### 3) Clôture algébrique

↔ Prop/Déf : algébriquement clos (AC) avec les équiv, Ex :  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  non AC, Prop : tout cors AC est infini, Thm de d'Alembert-Gauss, Cor : poly irréd de  $\mathbb{C}[X]$  et de  $\mathbb{R}[X]$ , Déf : clôture algébrique, Ex :  $\mathbb{C}$  clôture alg de  $\mathbb{R}$ , Thm Steinitz : existence et pseudo-unicité des clôtures alg, Ex :  $\cup_{n \geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$  clôture alg de  $\mathbb{F}_q$ .

## III - Polynômes cyclotomiques

1) ↔ Déf : poly cyclotomiques, Ex :  $\phi_1, \phi_3, \phi_8$ , Prop :  $X^m - 1 = \prod_{d|m} \phi_d(X)$ , Prop :  $\phi_m(X) \in \mathbb{Z}[X]$ , Prop : Irréductibilité des poly cyclotomiques, App : thm de Dirichlet version faible.

37.

- Gozard, *Théorie de Galois* (pour presque tout)
- Perrin, *Cours d'algèbre* (pour presque tout)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour Lemme des noyaux -et Berlekamp si on a la foi-)
- Gourdon, *Algèbre* (pour dvpt polynômes cyclotomiques)
- Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 1* (pour dvpt polynômes irréductibles de  $\mathbb{F}_q$ )

**38. Rapport du Jury** : Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que  $\mathbb{C}$ . Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur  $\mathbb{F}_2$ . Il faut connaître le théorème de la base télescopique ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.



## 142- Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications. <sup>39 40</sup>

Cadre :  $A$  anneau commutatif unitaire.  $K$  un corps.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .  $i \in \mathbb{N}^n$ ,  $i = (i_1, \dots, i_n)$ .  $|i| = \sum_{k=1}^n i_k$

### I - Polynômes à $n$ indéterminées

#### 1) Algèbre $A[X_1, \dots, X_n]$

$\leftrightarrow$  Déf : polynômes à  $n$  indéterminées, Déf : addition + multiplication + multiplication par un scalaire, Thm :  $A[X_1, \dots, X_n]$  est une  $A$ -algèbre commutative, Thm : monôme engendre l'algèbre, prop universelle, Thm : isomorphisme canonique, Ex : det et coefs du poly carac.

#### 2) Degré et polynômes homogènes

$\leftrightarrow$  Déf : degré partiel + deg total, Prop : relation deg somme % sup deg et deg prod % somme des deg, App :  $A$  intègre  $\Rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$  intègre, Déf : poly homogène, Prop : si 2 poly sont homogènes le produit est homogène, Appellation : poly homogènes de  $\deg \leq 2$  : cste + formes linéaire + formes quadratiques, App : Thm de Molien, Déf : poly dérivé partiel, Thm d'Euler.

#### 3) Propriétés arithmétiques

$\leftrightarrow$  Prop :  $A$  factoriel  $\Rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$  factoriel, Rq : si on est dans un corps  $K$  alors  $K[X_1, \dots, X_n]$  pas principal mais factoriel, Prop : divisibilité par  $X_n - B$   $B \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , Ex, Cor : divisibilité par  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$ .

### II - Fonctions polynômes

#### 1) Fonction polynôme et prolongement des identités

$\leftrightarrow$  Déf : fonction polynôme, conditions de non nullité de  $P$ , Thm : isomorph  $P \mapsto \tilde{P}$ , App : si  $\tilde{P}$  s'annule sur un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C} \Rightarrow P$  est nul, Déf : identité, Prop : prolongement des identités, App :  $\chi(MN) = \chi(NM)$

#### 2) Corps finis

$\leftrightarrow$  Thm Chevalley-Waring, Cor : si  $P_i$  sont sans terme constant ils ont un zéro commun non trivial, App : tte fq d'au moins 3 variables admet un zéro non trivial.

#### 3) Corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\leftrightarrow$  Prop : Si  $F_1$  et  $F_2$  coïncident sur un ouvert non vide alors  $F_1 = F_2$ , App : Cayley-Hamilton

### III - Application : Polynômes symétriques (et semi-symétriques)

#### 1) Polynômes symétriques

$\leftrightarrow$  Déf : poly sym, Déf : polynôme sym élémentaire, Prop : relation coefs/racines des polynômes à 1 indéterminée, Déf : poids d'un polynôme, Déf : ordre d'un polynôme, Thm : de structure avec algorithme pour trouver  $Q$ , Thm Kronecker

#### 2) (Polynômes semi-symétriques)

$\leftrightarrow$  Déf : poly semi-sym, Rq : déf poly alterné, Déf :  $V(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i < j} (X_j - X_i)$ , Ex :  $V$  semi-sym, Prop :  $F$  semi-sym  $\Leftrightarrow F = P + VQ$  avec  $P$  et  $Q$  sym.

---

39.

- Ramis Deschamps Odoux, *Algèbre 1* (pour quasiment tout)
- Goblot, *Algèbre commutative* (pour corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , polynômes semi-sym, prop universelle et prolongement des identités)
- Serre, *Cours d'arithmétique* (pour corps fini : Chevalley-Waring)
- Leichtnam, (pour Molien p.95)
- Francinou, Gianella, Nicholas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1* (pour Kronecker)

**40. Rapport du Jury** : La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type  $A[X]$ , où  $A$  est factoriel. Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur  $\mathbb{Z}$ . L'algorithme peut être présenté sur un exemple. Les applications aux quadriques, aux relations racine coefficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe  $GL_n(\mathbb{R})$  sur les polynômes à  $n$  indéterminés de degré inférieur à 2.



## 143 - Résultant. Applications. 41 42

Cadre :  $A$  un anneau intègre.  $P = \sum_0^m a_i X^i$  et  $Q = \sum_0^n b_i X^i$  dans  $A[X]$ .

### I - Introduction au résultant

#### 1) Matrice de Sylvester et résultant

↔ **Szpirglas** : Déf :  $\Phi_{P,Q} : (\text{Frac}(A))_{<n}[X] \times (\text{Frac}(A))_{<m}[X] \rightarrow (\text{Frac}(A))_{<n+m}[X]$  tq  $\Phi_{P,Q}(U, V) = PU + QV$   
 Déf : la matrice de  $\Phi_{P,Q}$  dans les bases  $((X^{n-1}, 0), \dots, (1, 0), (0, X^{m-1}), \dots, (0, 1))$  et  $(X^{m+n-1}, \dots, 1)$  est la matrice de Sylvester (+écrire la matrice en fct des coeff de  $P$  et  $Q$ , Déf : Le résultant est le déterminant de la matrice de Sylvester on le note  $\text{Res}(P, Q)$ , Rq :  $\text{Res}(P, Q)$  est un polynôme en les coeff de  $P$  et  $Q$  donc il est dans  $A$  + on peut aussi prendre le dét de la transposée le Sylv pour  $\text{Res}(P, Q)$ , Ex :  $\text{Res}(X^2 + 1, 3X) = 9$  avec  $A = \mathbb{Z}$ , Prop (**sans ref**) : si  $P, Q$  non nuls alors  $(\text{Res}(P, Q) = 0) \Leftrightarrow (P$  et  $Q$  ont un multiple commun de degré  $< m + n$  dans  $A[X] \setminus A)$ .

#### 2) Liens avec le PGCD

↔ **Szpirglas** : Thm : Si **A factoriel** et  $P, Q$  non nuls alors  $(\text{deg}(\text{PGCD}(P, Q)) \geq 1) \Leftrightarrow (\text{Res}(P, Q) = 0)$ , Cor : sous les mêmes hypothèses  $(\text{Res}(P, Q) = 0) \Leftrightarrow (P$  et  $Q$  ont une racine commune dans  $\overline{\text{Frac}(A)}$ ), Ex :  $\text{Res}(X^2 + 1, X^4 + 2X + 1) = 0$ , C-ex (**Mérindol**) :  $A = \mathbb{Q}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]/(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$   $A$  est intègre mais  $\text{Res}(P = x_1 X + x_2, Q = y_1 X + y_2) = 0$  alors que  $P$  et  $Q$  n'ont pas de facteurs communs non constants ( $x_1, x_2, y_1, y_2$  sont les classes de  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ ).

↔ **Gourdon** **Al** : Cor : 

Dans un corps, $P \wedge Q = 1 \Leftrightarrow \text{Res}(P, Q) = 0$
--

, App : 

L'intérieur des matrices diagbles sur $\mathbb{C}$ est l'ens des matrices diagbles à vp distinctes
--

↔ **Szpirglas** : Thm : si  $A$  seulement intègre et  $P, Q$  non nuls alors  $\exists (U, V) \in A_{n-1}[X] \times A_{m-1}[X]$  tq  $PU + QV = \text{Res}(P, Q)$ .

### II - Calcul effectif de résultant

#### 1) Algorithme d'Euclide

↔ **Saux-Picart** : Prop : petites propriétés du résultant comme  $\text{Res}(\alpha, Q) = \alpha^n$ , Prop : expression du résultant en fonction du résultant par le reste de la division euclidienne, Ex :  $\text{Res}(X^4 + 1, X^3 - X + 2) = 4$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

#### 2) Liens avec les racines

↔ **Szpirglas** : Thm : écriture du résultant en fonction des racines dans  $\overline{\text{Frac}(A)}$ , Ex, Cor : multiplicativité du résultant en la première puis deuxième variable, 

théorème de Kronecker + corollaire
------------------------------------

### III - Applications en algèbre et géométrie

#### 1) Discriminant

↔ **Szpirglas** : Déf : discriminant de  $P$  unitaire  $\Delta(P) = (-1)^{m(m-1)/2} \text{Res}(P, P')$ , Prop : expression du discriminant en fct des racines, Cor : ( $P$  unitaire a une racine multiple dans  $\overline{\text{Frac}(A)}$ )  $\Leftrightarrow \Delta(P) = 0$ , Ex : pour un polynôme de deg 2 et 3, Exemples de calculs de discriminants, (App : Cayley Hamilton).

#### 2) Eléments algébriques

↔ **Szpirglas** : Déf : élt algébrique sur  $K$  ( $x \in \bar{K}$ ) + entier algébrique, Prop : somme / produit / inverse d'élt algébriques sur  $K$  est algébrique, Cor : l'ensemble des élt algébriques est un corps et l'ensemble des entiers alg est un anneau, Ex : polynômes annulateurs d'une somme et d'un produit.

#### 3) Elimination dans les systèmes polynômiaux

↔ **Saux-Picart** : Lem :  $\varphi(\text{Res}(P, Q)) = \varphi(a_m)^{n-k} \text{Res}(\varphi(P), \varphi(Q))$  pour un morphisme d'anneaux  $\varphi$  avec  $k = \text{deg}(\varphi(Q))$ , Thm : théorème d'extension, Ex, Ex où apparaissent des "solutions parasites".

#### 4) Intersection de courbes algébriques planes

↔ **Szpirglas** : Déf : courbe algébrique plane, Thm : borne de Bézout, App : deux coniques de  $\mathbb{R}^2$  distinctes ont au plus 4 points d'intersection, Ex : avec 0,2,4 points d'intersections (+dessin).

#### 5) (Equations implicites...)

41.

- Szpirglas, *Mathématiques, Algèbre L3* (pour presque tout)
- Saux-Picart, *Cours de calcul formel, Algorithmes fondamentaux* (pour I & II)
- Merindol, *Nombres et algèbre* (pour un contre-exemple)

42. **Rapport du Jury** : Le caractère entier du résultant (il se définit sur  $\mathbb{Z}$ ) doit être mis en valeur et appliqué. La partie application doit montrer la diversité du domaine (par exemple en arithmétique, calcul d'intersection/élimination, calcul différentiel, polynômes annulateurs d'entiers algébriques). Il ne faut pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente  $(U, V) \mapsto AU + BV$  qui lie le résultant et le PGCD de  $A$  et  $B$ .

# 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications. <sup>43 44</sup>

Cadre :  $\mathbb{K}$  un corps commutatif.

## I - Racines d'un polynôme

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Gourdon** : Def : racine, Ex : racines de  $X^n - 1$ , Prop :  $a$  racine  $\Leftrightarrow X - a | P$ , Déf : racine d'ordre  $k$ , Prop :  $a$  racine d'ordre  $k \Leftrightarrow (X - a)^k | P$  et  $(X - a)^{k+1} \nmid P$ , C-ex : en caractéristique non nulle, Prop :  $P$  de degré  $n \Rightarrow$  au plus  $n$  racines, C-ex dans un anneau, Prop : si  $P$  s'annule sur un corps infini alors  $P = 0$ , C-ex dans un corps fini, App : bijection entre  $\mathbb{K}[X]$  et les fonctions polynômes, Cor : isomorphisme entre  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  et  $\mathbb{K}^n$  (**Nourdin**), App : déterminant de Vandermonde (**FGN A12**), Déf : scindé (**Gourdon**), Déf : irréductible (**Perrin**).

↔ **Gozard** : Prop : de degré 1  $\Rightarrow$  irréductible + irréductible de degré  $> 1 \Rightarrow$  sans racine, C-ex :  $(X^2 + 1)^2$  dans  $\mathbb{Q}$ , Thm : d'Alembert-Gauss, App : tte matrice de  $\mathbb{C}$  est trigonalisable (**sans ref**), Cor : polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$ .

### 2) Adjonction de racines

↔ **Gozard** : Déf : corps de rupture, Ex : pour les polynômes de degré 1, Thm : existence et unicité du corps de rupture, Ex : pour  $X^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $X^2 + X + 1$  sur  $\mathbb{F}_2$ , Prop :  $P$  de degré  $n$  est irréductible  $\Leftrightarrow$  il n'a pas de racines des les extensions de degré  $\leq n/2$ , App :  $X^4 + 1$  (**Perrin**), Déf : corps de décomposition, Thm : existence et unicité du corps de décomposition, Ex pour  $X^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $X^2 - 2$  sur  $\mathbb{Q}$ , App : construction des corps finis (**Perrin**), Déf : algébriquement clos, C-ex :  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ , Prop : tt corps algébriquement clos est infini, Déf : élt algébrique + extension algébrique, Déf : clôture algébrique, Ex :  $\mathbb{C}$  est une clôture algébrique de  $\mathbb{R}$ , App :

Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$

### 3) Résultant

↔ **Nourdin** : Déf : résultant, Prop : si  $P$  et  $Q$  ont une racine commune alors  $Res(P, Q) = 0$ , Prop : formule dans un corps algébriquement clos, Déf : discriminant, Prop : si  $P$  a une racine simple alors  $D(P) = 0$ , Ex : deux formules du discriminant en degré 2 et 3.

## II - Polynômes symétriques, fonctions symétriques élémentaires

1) ↔ **Gozard** : Déf : polynôme symétrique, Ex, Déf : polynômes symétriques élémentaires, Rq :  $\Sigma_k$  est homogène de degré  $k$ , Déf : poids, Ex : poids de  $\Sigma_k$ , Thm : thm de structure des polynômes symétriques, Rq : vrai sur un anneau, Algo du thm de structure + ex (**RDO**), Thm : relations coeff-racines.

↔ **FGN A11** : Thm : Kronecker + Cor, App : résolution d'un système (**sans ref**), Thm : formules de Newton.

## III - Localisation et comptage de racines

### 1) Localisation

↔ **Nourdin** : Prop : racines rationnelles d'un polynôme entier, Prop : majoration du plus grand des modules des racines en fonction des coeff (**Gourdon**), Thm : Gauss-Lucas.

### 2) Comptage

↔ **FG** : Thm : écriture des  $P_m$  quand  $P_m \rightarrow P$  avec  $P$  scindé.

↔ **OA** : Thm : une racine simple dépend localement du polynôme de manière  $C^\infty$ .

↔ (**Mignotte** : Thm : nombre de racines réelles positives en fonction du nombre de chgt de signes dans la suite des coeff, Ex, Cor, Thm : Formes de Hankel (**réf?**))

↔ (**OA** : Thm : Rouché (ou **Testard**), Ex )

43.

- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*, 2ème édition (pour la dépendance  $C^\infty$  des racines en fonction du polynôme, et Rouché)
- Groudon, *Algèbre*, 2ème édition (Pour Def et premières prop)
- Nourdin, *Agrégation de mathématiques, épreuve orale*, 2ème édition (pour résultant et localisation)
- Perrin, *Cours d'algèbre* (pour def d'irred et construction des corps finis)
- Gozard, *Théorie de Galois*, 2ème édition (pour beaucoup)
- Ramis, Deschamps, Odoux, *Mathématiques spéciales, algèbre*, 2ème édition (pour l'algo du thm de structure)
- Francinou, Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre 1* (pour un thm de régularité)
- (Mignotte, *Mathématiques pour le calcul formel*)
- Testard, *Analyse mathématique* (pour Rouché)
- FGN, *Algèbre 1* (pour Kronecker et Newton)
- FGN, *Algèbre 2* (pour Vandermonde)

44. **Rapport du Jury** : Il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter des méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou mêmes de formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres ...). On pourra parler des applications de la réduction au calcul d'approximation de racines.

# 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

45 46

## I - Action par translation

### 1) Action de $GL_n(\mathbb{K})$ et pivot de Gauss

↔ **H2G2** : Motivation : résolution de systèmes linéaires, Déf : action par translation à gauche, Prop : même orbite  $\Leftrightarrow$  même noyau, Déf : pivot + matrice échelonnée en ligne + réduite, Ex : de matrice échelonnée réduite, Rq : échelonnée en colonne si sa transposée est échelonnée en ligne, Thm : tte matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en ligne réduite, Méthode : pivot de Gauss, Rq : matrices dans la même orbite pour l'action par translation à droite  $\Leftrightarrow$  même image. App : calcul du rang + résolution de systèmes + calcul de l'inverse, Déf : matrice de dilatation et de transvection, Prop : ils engendrent  $GL_n(\mathbb{K})$  et  $SL_n(\mathbb{K})$ , (Thm : Décomposition de Bruhat (**FGN alg1**)).

### 2) Action de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

↔ **H2G2** : Action de  $U_n(\mathbb{C})$  sur  $M_n(\mathbb{C})$  par translation à gauche, Prop : décomposition polaire de  $GL_n(\mathbb{C})$  en  $U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$ , Action de  $O_n(\mathbb{R})$  sur  $M_n(\mathbb{R})$  par translation à gauche, Prop : décomp polaire de  $GL_n(\mathbb{R})$  en  $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

## II - Action de Steinitz

### 1) Rang et orbite

↔ **H2G2** : Déf : action par équivalence, Déf : matrices équivalentes, Rq : traduit un changement de bases, Thm :  $A = PA'Q^{-1} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A')$  et en particulier les orbites sont paramétrées par le rang, Csq :  $J_r$  avec  $r \in \{0, \dots, \min(m, n)\}$  système de représentants.

↔ **OA** : App :  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$ , App : indépendance du rang en fonction du corps, App : deux matrices équivalentes dans  $K$  le sont aussi dans  $k$  où  $k \subset K$ .

### 2) Topologie matricielle

↔ **H2G2** : Prop :  $GL_n(\mathbb{K})$  dense dans  $M_n(K)$  (**OA**), Thm : Adhérence des orbites des matrices de rang  $r$ , Cor : orbite fermée et orbite ouverte, Thm : Si  $p \leq n - 1$  l'orbite des matrices de rg  $p$  est  $n$  connexe de  $M_n(\mathbb{K})$  (**Mneimé-Testard**).

## III - Action par conjugaison

### 1) Généralités

↔ **Gourdon** : Déf : Action de conjugaison, Déf : matrices semblables, Prop : Si  $A$  et  $B$  semblables sur  $\mathbb{C}$  alors elles le sont sur  $\mathbb{R}$ , Prop : conjugaison traduit un changement de base, Déf : diagonalisable et trigonalisable, App : calcul de puissances, Prop : décomposition de Jordan, App :  $M$  et  $2M$  semblables  $\Leftrightarrow M$  nilpotente, App :  $M$  et  ${}^t M$  semblables dans  $\mathbb{C}$ , Rq : donc aussi dans  $\mathbb{R}$ .

### 2) Invariants de similitude

↔ **Gourdon** : Déf/Prop : existence d'invariant de similitude, Déf : matrice compagnon, Thm : Réduction de Frobenius, Cor : 2 matrices sont semblables  $\Leftrightarrow$  même invariant de similitude.

### 3) Action de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

↔ **Gourdon** : Action de  $O_n(\mathbb{R})$  sur  $M_n(\mathbb{R})$  par conjugaison, Thm : Réduction des endo normaux, Thm : matrice sym réelle diag dans une BON, Thm : réduction des matrices antisymétriques réelles, Thm :  $SO_n(\mathbb{R})$  connexe par arcs (**Mneimé-Testard**), Action de  $U_n(\mathbb{C})$  sur  $M_n(\mathbb{C})$ , Prop : orbite si  $M \in U_n(\mathbb{C})$  / si  $M$  est normale / si  $M^* + M = 0$  / si  $M$  hermitienne, App : racine carré d'une matrice hermitienne positive.

## IV - Action par congruence

1) ↔ **H2G2** : Déf : Action de congruence et matrices congruentes, App : matrices congrues sont même forme quadratique dans 2 bases, Thm : Sylvester avec système  $I_{p,r-p}$  de représentant des orbites, Rq : les orbites sont les matrices dont la fq associée à  $p$  carrés positifs et  $r-p$  carrés négatifs, Thm : sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$  (**Szpirglas**), Prop : Dans  $S_n(\mathbb{C})$  même orbite  $\Leftrightarrow$  même rang, Prop : Si  $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$  alors  $\exists V$  voisinage de  $A_0$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\psi$  de  $V$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$   $\mathcal{C}^1$  tq  $\forall A \in V$   $A = {}^t \psi(A)A_0\psi(A)$  (**Rouvière**).

45.

- Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (pour presque tout)
- Gourdon, *Algèbre* (pour III)
- Beck, *Objectif agrégation* (pour II-1)
- Mneimé-Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques* (pour 2 trucs)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (pour Bruhat)
- Szpirglas, *Algèbre* (pour ss-groupe compact)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (lemme du lemme de Morse)

46. **Rapport du Jury** : Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête.

# 151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications. <sup>47 48</sup>

## I - Théorie de la dimension

### 1) Familles génératrices, libres, bases

↔ **Grifone** : Déf : famille génératrice + libre + base, Des exemples, Prop : toute sous (resp sur) famille d'une famille libre (resp génératrice) est libre (resp génératrice), Prop : une famille est une base  $\Leftrightarrow$  elle est génératrice minimale  $\Leftrightarrow$  elle est libre maximale (**Debeaumarché 4**).

### 2) Espaces vectoriels de dimension finie

↔ **Grifone** : Déf : ev de dimension finie, Des exemples, Thm : dans un ev de dim finie si  $G$  est une base et  $L \subset G$  une famille libre alors il existe une base  $B$  telle que  $L \subset B \subset G$ , Thm : de tte famille génératrice on peut extraire une base et toute famille libre peut être complétée en une base, Ex : détermination d'une base par l'algorithme de Gauss en échelonnant des matrices, Lem : dans un ev engendré par  $n$  élts, tte famille d'au moins  $n + 1$  élts est liée, Thm : ttes les bases ont même dim, Déf : dim d'un ev, Des exemples, Cor : dans un ev de dim  $n$  tte famille ayant moins de  $n$  élts n'est pas génératrice et tte famille ayant plus de  $n$  éléments est liée ; tte famille libre ou génératrice à  $n$  éléments est une base, Des exemples, App : dém par récurrence sur la dim : Réduction des endo normaux, Prop : dim d'un produit d'ev.

### 3) Sous-espace vectoriel

↔ **Grifone** : Prop :  $F$  sev de  $E$  de dim  $n$  est de dim finie  $\leq n$  et  $\dim E = \dim F \Leftrightarrow E = F$ , Déf : somme / somme directe / supplémentaire, Prop :  $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow$  pour ttes base  $B_1$  et  $B_2$  de  $E_1$  et  $E_2$  on a  $(B_1, B_2)$  base de  $E$ , Cor : tt sev possède un supplémentaire et ils sont de même dim, Thm :  $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$  et  $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$ , Ex de supplémentaires, Thm : formule de Grassmann.

### 4) Dimension et applications linéaires

↔ **Grifone** : Prop : image d'une famille libre/génératrice par une application injective/surjective, Prop : 2 ev sont isomorphes  $\Leftrightarrow$  ils ont même dim, App :  $\dim \mathcal{L}(E, F)$ , App : dim de l'espace des solutions d'une EDL (**Gourdon An**).

## II - Rang et applications linéaires

### 1) Définitions et théorème du rang

↔ **Grifone** : Déf : rang d'une application linéaire + d'une famille de vecteurs + d'une matrice, Prop : le rang d'une appli lin est égal au rang de sa matrice, Rq : deux matrices semblables ont même rang, Prop : invariance du rang par composition par un isomorphisme (**Debeaumarché 4**), Thm : thm du rang, App :  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$  pour un projecteur, Cor : en dim finie injective  $\Leftrightarrow$  bijective  $\Leftrightarrow$  surjective, App : polynômes interpolateurs de Lagrange (**Debeaumarché 4** ou **OA**).

### 2) Caractérisation et calcul effectif du rang

↔ **Gourdon A1** : Prop : une matrice de rang  $r$  est équivalente à  $J_r$ , Cor :  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$ , Cor : deux matrices sont équivalentes  $\Leftrightarrow$  elles ont le même rang, Prop : le rang d'une matrice est la taille du plus grand sous déterminant non nul, Prop : les opérations élémentaires ne modifient pas le rang, App : calcul du rang d'une matrice.

### 3) Formes linéaires

↔ **Grifone** : Déf : forme lin et dual, Ex : la différentielle d'une application à valeurs dans  $\mathbb{K}$  en est une, Thm : extrema liés (**Gourdon An**), Prop : le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan, Ex :  $\dim\{A/\text{Tr}(A) = 0\} = n^2 - 1$ , Prop : en dim finie  $\dim(E) = \dim(E^*)$ , Thm/Déf : base duale, Ex, Prop :  $E^{**}$  est canoniquement isomorphe à  $E$ .

## III - Extension de corps et dimension

1) ↔ **Gozard** : Déf : extension de corps + degré de l'extension, Exemples, Thm : base télescopique, Cor : multiplicité du degré, Déf : élt algébrique + polynôme minimal, Thm :  $a \in K$  est algébrique sur  $k \Leftrightarrow k[a]$  est de dim finie et cette dim est le degré du polynôme min, Ex.

---

47.

- Grifone, *Algèbre linéaire* (pour presque tout)
- Gourdon, *Algèbre* (pour réduction des endo normaux et caractérisation du rang)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (pour polynômes interpolateurs de Lagrange)
- Gourdon, *Analyse* (pour extrema liés et dim de l'espace des solutions d'une EDL)
- Gozard, *Théorie de Galois* (pour la partie extension de corps)
- Debeaumarché, *Volume 4* (pour 2 prop, mais on peut s'en passer si on veut)

48. **Rapport du Jury** : C'est une leçon qui, contrairement aux apparences, est devenue difficile pour les candidats. Nombre d'entre eux n'ont pas été capables de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est-il aussi de dimension finie ? Il faut bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée des preuves. Les diverses caractérisation du rang doivent être connues.

## 152 - Déterminant. Exemples et applications. 49 50

Cadre :  $\mathbb{K}$  est un corps,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

### I - Formes multilinéaires et déterminant

#### 1) Formes multilinéaires

↔ **Gourdon A1** : Déf : forme multilin + alternée + antisym, Ex :  $\varphi : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_p)$ , Rq : antisym  $\Leftrightarrow f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p)$ , Thm : en carac  $\neq 2$  on a antisym  $\Leftrightarrow$  alternée, Thm : l'ensemble des formes  $n$ -linéaires est de dim 1.

#### 2) Déterminant d'une famille de vecteurs

↔ **Gourdon A1** : Déf : on appelle dét dans la base  $B$  l'unique forme  $n$ -linéaire alternée qui vaut 1 sur  $B$ , Rq :  $f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det_B(x_1, \dots, x_n)$ , Thm : être liée  $\Leftrightarrow$  de dét 0 dans une base, App :  $f_u = \text{tr}(u)f$  avec  $f_u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

#### 3) Déterminant d'un endomorphisme

↔ **Gourdon A1** : Prop/déf : dét d'un endo + indépendante de la base, Prop :  $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$ ;  $\det(\text{Id}) = 1$ ;  $f$  inversible  $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$  et  $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$ , App :  $SL(E)$  distingué dans  $GL(E)$  (**Tauvel**).

#### 4) Déterminant d'une matrice carrée

↔ **Gourdon A1** : Déf : dét d'une matrice + notation, Ex : dét  $2 \times 2$  + règle de Sarrus, Prop :  $\det(A) = \det(A^t)$ ; si  $A$  est la matrice de  $f$  alors  $\det(A) = \det(f)$ . Rq :  $\det(AB) = \det(BA)$  donc 2 matrices semblables ont même dét.

### II - Méthodes de calcul

#### 1) Se ramener au cas triangulaire

↔ **Gourdon A1** : Prop : dét d'une matrice triangulaire par bloc, Ex : en dim  $2 \times 2$ , Prop : permutation des colonnes  $\Rightarrow$  dét multiplié par la signature de la perm; le dét est invariant par les opérations élémentaires, Rq : algo de Gauss  $\Rightarrow$  calcul du det d'une matrice triangulaire, Ex simple.

#### 2) Mineurs et cofacteurs

↔ **Gourdon A1** : Déf : mineurs + cofacteurs + mineurs principaux, Prop : dvpt selon ligne ou colonne, Ex, Déf : comatrice, Prop :  $ACom(A)^t = \det(A)I_n$ , Ex : inverse d'une matrice  $2 \times 2$ .

#### 3) Déterminants particuliers

↔ **Gourdon A1** : Dét de Vandermonde, Dét de Cauchy, Dét circulant, Ex : cas où  $a_i = \cos(i\theta)$ .

### III - Applications en algèbre et géométrie

#### 1) Systèmes linéaires

↔ **Gourdon A1** : Formules de Cramer, Ex (**Grifone**), App : rang de  $A$  en fonction des dét extraits.

#### 2) Polynôme caractéristique

↔ **Gourdon A1** : Déf : poly carac, Rq :  $\chi_A(0) = \det A$ , Prop : les vp de  $A$  sont les racines de  $\chi_A$ , App : thm de Burnside (**FGN A12**), Prop : polynôme carac d'une matrice compagnon, App : théorème de Cayley-Hamilton.

#### 3) Résultant

↔ **Gourdon A1** : Déf : résultant, Prop : Résultant et applications (exo gourdon), Prop : intérieur des matrices diagbles = matrices diagbles à vp distinctes, Thm : Kronecker + corollaire (**FGN A11**).

#### 4) Géométrie

↔ **OA** : Interprétation du dét comme le volume d'un parallélépipède.

↔ **Gourdon A1** : Déf : dét de Gram, Thm : distance à un ss-espace en fct du dét de Gram.

↔ **Grifone** : Déf : orientation d'une base, Rq : c'est une relation d'équivalence, Ex.

### IV - Applications en analyse

#### 1) Régularité du déterminant

↔ **Gourdon An** : Prop :  $\det$  est polynomiale en les coeff de la matrice  $\Rightarrow C^\infty$ , Prop : différentielle du dét, App :  $GL_n(\mathbb{K})$  dense dans  $M_n(\mathbb{K})$ , App :  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe mais pas sur  $\mathbb{R}$  (**ref?**).

#### 2) Changements de variables

↔ **Gourdon An** : Déf : Jacobien, Ex : Jacobien du passage en polaire, Thm : chgt de variables, App : Ellipsoïde de John-Loewner (**FGN A13**).

#### 3) Equations différentielles

↔ **Gourdon An** : Déf : Wronskien, Ex : pour une EDL d'ordre 2, Prop : base de solution  $\Leftrightarrow$  Wronskien non nul en un point  $\Leftrightarrow$  Wronskien nul en tout point, Prop : expression du Wronskien en fonction de la trace de  $A$ .

49.

- Gourdon, *Algèbre* (pour presque tout)
- Gourdon, *Analyse* (pour les appli en analyse)
- (Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (pour l'interprétation géométrique et Frobenius-Zolotarev))
- Grifone, *Algèbre linéaire* (pour l'orientation des bases)
- Tauvel, ? (pour  $SL(E)$  distingué dans  $GL(E)$ )

**50. Rapport du Jury :** Il faut que le plan soit cohérent : si le dét n'est défini que sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , il est délicat de définir le polynôme carac d'une matrice. L'interprétation du dét comme le volume est essentielle. Bcp de candidats commencent la leçon en disant que le ss-espace des formes  $n$ -lin alternées sur un espace de dim  $n$  est de dim 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le démontrer. Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un dét circulant ! Le résultant et les appli simples à l'intersection ensembliste de 2 courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale, on attend pdt le dvpt l'illustration d'un calcul ou la manipulation de dét non triviaux. Il serait bien que la continuité du dét trouve une appli, ainsi que son caractère poly.

# 153 - Polynômes d'endomorphisme en dim finie. Applications à la réduction en dimension finie. <sup>51 52</sup>

Cadre :  $\mathbb{K}$  corps commutatif,  $E$   $\mathbb{K}$ -ev de dim  $n < \infty$

## I - Polynômes d'endomorphisme

- 1) L'algèbre  $\mathbb{K}[u]$ 
  - ↔ Déf : pol d'endomorphisme et de matrice, Déf : morphisme  $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$   $P \mapsto P(u)$ , Déf : algèbre  $\mathbb{K}[u]$ , Rq : algèbre commutative, Prop :  $\text{Ker}(P(u))$  et  $\text{Im}(P(u))$  stables par  $u$ , Lem : Décomposition des noyaux.
- 2) Le polynôme minimal de  $u$ 
  - ↔ Prop :  $\text{Ker}(\varphi_u)$  idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , Rq :  $\mathbb{K}[X]$  principal donc unique pol unitaire qui engendre  $\text{Ker}(\varphi_u)$ , Déf : pol minimal  $\Pi_u$ , Prop : isom d'algèbre  $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\Pi_u)$  et isom par lemme chinois, Ex : projecteur, Prop :  $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\Pi_u)$  et base de  $\mathbb{K}[u]$ , Rq :  $F$  sev stable par  $u \Rightarrow \Pi_u|_F$  divise  $\Pi_u$ , Prop : Si  $E = F \oplus G$  sev stables par  $u \Rightarrow \Pi_u = \text{ppcm}(\Pi_u|_F, \Pi_u|_G)$ , Prop :  $P$  pol annulateur de  $u$  alors  $\text{Sp}(u) \subset \text{racines de } P$ . Prop :  $\lambda$  vp de  $u \Leftrightarrow \lambda$  racine de  $\Pi_u$ , Rq : def du pol minimal d'une matrice.
- 3) Le polynôme caractéristique de  $u$ 
  - ↔ Déf :  $\chi_A$  pol carac de  $A \in M_n(\mathcal{K})$ , Prop : matrices semblables ont même pol carac d'où def du pol carac d'un endo, Prop :  $\lambda$  vp de  $u \Leftrightarrow \lambda$  racine de  $\chi_u$ , Thm : Cayley-Hamilton, Cor :  $\Pi_u$  divise  $\chi_u$  et  $\deg(\Pi_u) \leq n$ , Ex :  $u$  nilpotent  $\Leftrightarrow \chi_u(X) = (-1)^n X^n$ , Prop :  $F$  sev stable par  $u$  alors  $\chi_u|_F$  divise  $\chi_u$ , App :  $\lambda$  vp de  $u$  de multiplicité  $m_\lambda$  dans  $\chi_u \Rightarrow 1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$

## II - Polynômes d'endomorphisme : un outil pour la réduction

- 1) Application à la diagonalisation
  - ↔ Prop :  $u$  diagble  $\Leftrightarrow \exists$  pol annulateur de  $u$  scindé à racines simples  $\Leftrightarrow \Pi_u$  est scindé à racines simples  $\Leftrightarrow \chi_u$  scindé et  $\forall \lambda$  vp  $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ . Ex : projecteur/ sym/  $A \mapsto {}^t A$ , App : corps fini ( $u$  diago dans  $\mathbb{F}_q$ )  $\Leftrightarrow (u^q = u)$ , App : thm Burnside, Thm : Réduction des endomorphismes normaux, App : diagonalisation matrices sym réelles.
- 2) Application à la trigonalisation
  - ↔ Prop :  $u$  trigble  $\Leftrightarrow \exists$  pol annulateur de  $u$  scindé  $\Leftrightarrow \Pi_u$  est scindé  $\Leftrightarrow \chi_u$  scindé, App :  $\mathbb{K}$  alg clos  $\Rightarrow$  tout endo est trigble, Ex :  $\mathbb{K}$  alg clos ( $u$  nilpotent)  $\Leftrightarrow$  (0 seule vp de  $u$ ).
- 3) Décomposition de Dunford
  - ↔ Thm : décomposition de Dunford, Ex et C-ex de décomposition.

## III - Applications

- 1) Calcul de puissances
  - ↔ Méthode division euclidienne par un polynôme annulateur. Ex, Décomposition de Dunford pour calculer les puissances.
- 2) Calcul de l'inverse
  - ↔ Méthode pour trouver l'inverse à partir d'un pol annulateur, Ex précédent d'inverse  $\frac{A-I_n}{2}$ . Ex.
- 3) Commutant
  - ↔ Def : commutant  $\Gamma(u)$ , Rq :  $\mathbb{K}[u] \subset \Gamma(u)$ , Prop : Si  $A$  a  $n$  vp distinctes alors  $\Gamma(A)$  formé des matrices diagonales, une base de  $\Gamma(A)$  est  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  et  $\Gamma(A) = \mathbb{K}[A]$
- 4) Exponentielle d'endomorphisme
  - ↔ Déf : exp d'un endo, Prop : exp( $u$ ) pol en  $u$ , Rq : exp( $u$ ) commute avec  $u$  + ( $u, v$  commutent)  $\Rightarrow$  (exp( $u$ ) et exp( $v$ ) aussi), Prop : dans  $M_n(\mathbb{C})$ ,  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ , Calcul de l'exp par Dunford, Rq : méthode efficace seulement si on a déjà la décomposition, Ex, App : résolution d'équa diff.

51.

- Beck, *Objectif agrégation*, 2ème édition (I.1, I.2, I.3, II.1, II.2, pour c-ex de Dunford)
- Gourdon, *Algèbre*, 2ème édition (I.1, I.2, red des endo normaux, thm Dunford)
- Merlin, *MethodiX algèbre* (III)
- Cognet, *Algèbre linéaire* (Pour  $\text{ker}P(u)$  et  $\text{Im}P(u)$  stables par  $u$ , I.2, I.3)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2* (Burnside)

52. **Rapport du Jury** : Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre  $\mathbb{K}[u]$ , connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de l'algèbre  $\mathbb{K}[u]$ . Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Le jury ne souhaite pas que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme. L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre  $\lambda$  donnée (algébrique ou géométrique). Enfin rappelons que pour calculer  $A^k$ , il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de  $A$  (la donnée d'un polynôme annulateur de  $A$  suffit bien souvent).



# 154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. 53 54

Cadre :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dim finie  $n$ .  $F$  un sev de  $E$  de dim finie  $r$ .  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ .

Motivations : Chercher des expr simples des app pour les classifier par ex. Découper l'espace en "bons" ss-espaces.

## I - Généralités sur les sous-espaces stables (SES)

### 1) Définitions, premières propriétés

$\leftrightarrow$  **OA** : Déf : SES. Ex :  $\text{Ker} + \text{Im} + \text{ss-espaces propres (sep)}$ , Prop : si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$   $u$  a une droite stable, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$   $u$  a une droite ou un plan stable, Prop : si  $u \circ v = v \circ u$  alors  $\text{Ker}v$  et  $\text{Im}v$  stables par  $u$ , Rq : ss-espaces carac (sec) et sep stables. Prop :  $u$  laisse stable tous les ss-espaces stricts de  $E \Leftrightarrow u$  homothétie (**FGNA11**), Ex (**Mansuy**).

### 2) Endomorphismes induits et bases adaptées

$\leftrightarrow$  **OA** : Prop :  $F$  stable  $\Rightarrow$  2 endo  $\bar{u}$  et  $u|_F$ , Prop :  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  lorsqu'on a un SES et alors  $\chi_u = \chi_{u|_F} \chi_{\bar{u}} + \text{récip triang}$  par blocs  $\Rightarrow$  des SES, Rq :  $C = 0 \Rightarrow$  2 SES supplémentaires, Rq : Si  $\bar{u} = 0$  et  $u|_F = 0$  on peut avoir  $u \neq 0$ . Ex (**Mansuy**), Prop :  $\chi_u$  irréd  $\Leftrightarrow u$  n'admet pas de SES non trivial, App : si  $w = uv - vu$  est tel que  $\text{rg}(w) = 1$  alors  $\chi_u$  non irréd dans  $\mathbb{K}[X]$  (**Gourdon**).

### 3) Dualité et SES

$\leftrightarrow$  **Gourdon** : Déf : orthogonal, Déf :  ${}^t u$ . Prop :  $F$  stable par  $u \Leftrightarrow F^\perp$  stable par  ${}^t u$ . Prop : si  $E$  euclidien ou hermitien,  $F$  stable par  $u \Leftrightarrow F^\perp$  stable par  $u^*$ . App : SES de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R} \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y + z = 0\}$  et  $\mathbb{R}^3$  (**Madère**).

## II - Application à la réduction

**Mansuy** : Prop : si  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  SES par  $u$ , alors  $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_{u|_F}, \pi_{\bar{u}})$

### 1) Réduction par blocs

$\leftrightarrow$  **Goblot** : Prop : triang par blocs lorsqu'on a une suite croissante de SES, Prop : CNS de diag par blocs.

$\leftrightarrow$  **Gourdon** : Lem des noyaux, Rq : poly annulateur  $\Rightarrow \exists$  matrice diag par blocs de  $u$ , App :  $E$  somme directe des sec et dim du sec = multiplicité.

$\leftrightarrow$  **OA** : Prop : lemme des noyaux avec un SES, Ex :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  a 9 SES

### 2) Diagonalisation et trigonalisation

$\leftrightarrow$  **Mansuy** : Déf : drapeau complet, Prop :  $u$  trigb  $\Leftrightarrow$  il laisse stable un drapeau complet  $\Leftrightarrow \chi_u$  scindé,

$\leftrightarrow$  **Gourdon** : Prop :  $u$  diagb  $\Leftrightarrow$  il laisse  $n$  droites  $\perp$  stables  $\Leftrightarrow \chi_u$  est scindé et mult des vp = dim du sep. Prop :  $u$  diagb (resp trigb) et  $F$  stable par  $u \Rightarrow u|_F$  diagb (resp trigb), Ex : SES de diag(1, 2, ..., n). Prop : co-réduc qd commut.

$\leftrightarrow$  **OA** : App :  $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K}) \Leftrightarrow n = m$ . App : matrices d'un sg  $G$  fini abélien de  $GL_n(\mathbb{C})$  co-diagb (**Mansuy**). Rq : réduc simultanée utile, App : si  $U, V$  diagb  $\Phi_{U,V} : M \mapsto UM - MV$  est diagb.

### 3) Décomposition de Dunford

$\leftrightarrow$  **Gourdon** : Décomposition de Dunford, C-ex si pas d'hyp de commutation (**OA**), App : Calcul de l'exp, App :  $u$  diagb  $\Leftrightarrow \exp(u)$  diagb (**OA**).

## III - Endomorphismes remarquables

### 1) Endomorphismes semi-simples

$\leftrightarrow$  **OA** : Déf : semi-simple, Ex : les diagb, Thm :  $u$  semi-simple  $\Leftrightarrow \pi_u$  prod de poly irréd unitaires  $\neq 2$  à 2, Rq : si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : semi-simple  $\Leftrightarrow$  diagb, App : non nul + nilpotent  $\Rightarrow$  jms semi-simple, App : si  $u$  semi-simple et  $F$  stable par  $u$  alors  $u|_F$  et  $\bar{u}$  semi-simples, Rq : récip fausse  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 2) Endomorphismes normaux

$\leftrightarrow$  **Gourdon** :  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : Déf : normal, Ex : symétrique, Prop : stabilité de l'ortho d'un sep, Thm :  $u$  normal  $\Leftrightarrow u$  se diagonalise ds une BON  $\Leftrightarrow u$  et  $u^*$  se diagonalisent ds une BON commune,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  : Prop : si  $n = 2$  et  $u$  n'admet pas de vp réelles, ds tte BON  $u \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , Thm : Réduction des endo normaux

### 3) (Endomorphismes cycliques et réduction de Frobenius)

## IV - Théorie des représentations

1)  $\leftrightarrow$  **Peyré** : Déf : rep + degré, Ex : triviale, permut, Déf : ss-rep., Déf : rep irréd, Ex : rep de degré 1, Thm : Maschke, Lemme de Schur.

53.

- Gourdon, *Algèbre* (pour presque tout)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour presque tout)
- Peyré, *Algèbre discrète de la transformée de Fourier* (ou son livre de représentation préféré, pour représentations)
- Goblot, *Algèbre linéaire* (pour les réductions par blocs)
- Mansuy (& Mneimé), *Algèbre linéaire Réduction des endomorphismes* (pour début II.2. et plein d'exemples si on veut)
- (FGNA11) (1 ex)
- (Madère, *Leçons d'Algèbre*) (1 ex)

54. **Rapport du Jury** : Les candidats doivent s'être interrogés sur les propr de l'ensemble des SES par un endo. Des études détaillées de cas sont les bienvenues. La décomp de Frobenius trouve tout fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté la notion de familles d'endo. Ceci peut déboucher par ex sur des endo commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

# 155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie 55 56

Cadre :  $K$  corps.  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dim finie  $n$ . On identifiera  $\mathcal{L}(E)$  avec  $\mathcal{M}_n(K)$

## I - Définitions

### 1) Éléments propres

↔ Déf : valeur propre + vect propre + spectre, Déf : espace propre, Rq : Stabilité de  $E_\lambda$  par  $f$ . Ex : spectre et espace propre, Thm : espaces propres tjrs en somme directe, Ex : rotations dans  $\mathbb{R}^2$  endomor $\varphi$  sans valeur propre.

### 2) Algèbre $K[f]$ et polynôme minimal

↔ Déf : pol d'endo, Déf :  $K[f]$ , Rq :  $K[f]$  ss-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ , Déf :  $I$  idéal des polynômes annulateurs de  $f$ , Déf :  $\Pi_f$  pol minimal de  $f$  qui engendre  $I$ , Prop :  $P(f) = 0 \Rightarrow (\forall \lambda \in Sp(A), P(\lambda) = 0)$ .

### 3) Polynôme caractéristique

↔ Déf : pol caractéristique  $\chi_A$ , Ex : calcul d'un  $\chi$ , Rq :  $A$  et  ${}^tA$  ont même pol carac, Rq :  $A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$ , Prop :  $\lambda$  vp de  $f \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$ , Prop :  $K$  algébriquement clos  $\Rightarrow Sp_K(f) \neq \emptyset$ , Thm Cayley-Hamilton, Prop :  $\Pi_f \mid \chi_f$ .

## II - Diagonalisabilité

### 1) Définition

↔ Déf :  $A$  diagonalisable + Endo diagonalisable  $\Leftrightarrow$  sa matrice est diagonalisable.

### 2) Critère de diagonalisabilité

↔ Lemme des noyaux, Prop : Équivalence de diagonalisabilité : base formée de vect propre  $\Leftrightarrow E$ =somme directe esp propre  $\Leftrightarrow$  égalité des dimensions  $\Leftrightarrow \chi_f$  scindé et multiplicité= dim espace prop  $\Leftrightarrow$  poly annulateur scindé simple  $\Leftrightarrow \Pi_f$  scindé simple, Ex : diagonalisabilité, App : résolution d'un système de suites récurrentes, Prop : (dans un corps fini  $F_p$ ) diago  $\Leftrightarrow f^p = f$ .

### 3) Conséquences topologiques

↔ Notations :  $T_n$ ={trigonalisables}  $D_n$ ={diagonalisables}  $C_n$ ={diagonalisables à vp distinctes}, Prop :  $\overline{C_n(K)} = T_n(K)$  et  $\overline{D_n} = C_n(K)$ , Prop :  $D_n(\mathbb{C})$  dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ , C-ex dans  $\mathbb{R}$  :  $D_n(\mathbb{R})$  n'est pas dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , App :  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ .

## III - Familles d'endomorphismes diagonalisables

### 1) Codiagonalisabilité

↔ Prop (codiagbles) :  $f, g$  diagonalisables et commutent  $\Rightarrow \exists$  base commune de diagonalisation, Version matricielle de codiagonalisabilité, App :  $GL_n(k)$  non isomorphe à  $GL_m(k)$

### 2) Endomorphismes normaux

↔ Contexte :  $E$  hermitien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ , Déf :  $f$  normal, Prop :  $f$  normal  $\Leftrightarrow (f$  se diagonalise dans une BON  $\Leftrightarrow (f$  et  $f^*$  se diagonalisent dans une BON commune), Prop :  $M$  normale  $\Leftrightarrow \exists P$  unitaire avec  $P^{-1}MP$  diagonale, Ex : avec  $R_\theta$  normale donc diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ , Prop : réduction des endomorphismes normaux, App : Cas particulier des isométries, Prop :  $E$  euclidien  $f$  endo autoadjoint  $\exists$  base orthonormée de vect propres pour  $f$  et  $Sp(f) \subset \mathbb{R}$ , App : Cas des matrices symétriques réelles

## IV - Décomposition de Dunford

1) ↔ Thm : Décomposition de Dunford, Ex, App : exponentielle de matrice, App : Résolution d'un système différentielle linéaire.

---

55.

- Gourdon, *Algèbre*, 2ème édition (pour la majorité + DVPT 1 & 2)
- Grifone, *Algèbre linéaire*, 4ème édition (critère de diago, suite récurrente)
- Beck, *Objectif Agrégation*, 2ème édition (pour csq topologique et  $GL_n(K)$  non iso à  $GL_m(k)$ )

**56. Rapport du Jury** : Donner des ex naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Calcul de l'exp d'un endo diagonalisable immédiat grâce aux projecteurs spectraux si on connaît son spectre et sans diagonaliser la matrice. Sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , donner des propriétés topologiques. Sur les corps finis, dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données. L'affirmation :  $\overline{D_n(K)} = \mathcal{M}_n(K)$  nécessite précisions sur  $K$  et sur la topologie choisie pour  $\mathcal{M}_n(K)$ .



# 156 - Exponentielle de matrices. Applications. 57 58

**Cadre** :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $n \in \mathbb{N}$ .  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|$  usuelle associée.

## I - Généralités

### 1) Définitions et premières propriétés

- ↔ **Dem ou Gou** : Déf :  $\exp$ , Rq : c'est un poly en la matrice (**Gou**), Rq :  $\|\exp(A)\| = \exp(\|A\|)$ , Prop : continuité (**Gou**), Ex : au choix diag par blocs ou nilp ou triang (**Dem ou Szpi**), Prop : si  $AB = BA$   $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ , C-ex, Cor : inversibilité, Cor :  $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ , App : l'exp restreintes aux matrices diagonalisables réelles est injective (**FGN A12**), C-ex :  $\exp\begin{pmatrix} 0 & 2k\pi \\ -2k\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2$
- ↔ **FGN A12 ou M-T ou Szpi** : Prop :  $\exp(tA) = {}^t(\exp(A))$ .
- ↔ **Gou** : Prop :  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$  (ou **Dem ou Szpi**), App : si  $M$  est l'exp d'une matrice réelle  $\det(M) > 0$  et récip fausse, App :  $\exp: (\mathbb{C}[A], +) \rightarrow (\mathbb{C}[A]^\times, \cdot)$  est un morphisme de groupes (**Zav**).

### 2) Calcul de l'exponentielle

- ↔ **MéthodiX algèbre** : méthodes de calcul de puissance de matrice et exponentielle.
- ↔ **Gou** : Thm : [Décomposition de Dunford], App : calcul de exp, Ex exp d'une matrice.
- ↔ **OA** : C-ex à la décomp, Rq : peu utilisé en pratique car calcul de la décomposition assez complexe.
- ↔ **Gri ou Gou ou OA** : Prop : décomp de Jordan, App : calcul de l'exp.

## II - Propriétés de la fonction exponentielle

### 1) Différentiabilité et inversion locale

- ↔ **M-T ou Szpi** : Thm :  $\exp$  est  $\mathcal{C}^1$  et sa diff en 0 est  $Id$ , Prop : elle réalise donc un difféo local au voisinage de 0, App : [différentielle de l'exp] (**ou Rou**), App :  $GL_n(\mathbb{K})$  n'a pas de ss-gpes arbitrairement petits, Déf :  $\log$ , Rq : il peut être défini sur les unipotentes, Prop :  $\forall A \in B(Id, 1)$  on a  $\exp(\log(A)) = A$ , Prop :  $\exp$  réalise un homéo entre les nilpotentes et les unipotentes ; son inverse est  $\log$  (ou **FGN A12** ou **OA**).
- ↔ **OA** : Prop : décomp de Dunford de  $\exp$  (ou **FGN A12**), App : [A diagb  $\Leftrightarrow \exp(A)$  diagb], App :  $\exp(A) = Id \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$  (ou **FGN A12** ou **Szpi**), App :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tM) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(M), \text{Re}(\lambda) < 0$  (**Gou**).
- ↔ **M-T ou H2G2** : Prop :  $\exp$  induit un homéo de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , Rq : de même de  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ , App : décomp polaire.

### 2) Surjectivité

- ↔ On a déjà vu inj sur matrices diagbles sur  $\mathbb{R}$  mais pas sur  $\mathbb{C}$ .
- ↔ **Gou** : Dans  $\mathbb{C}$  : [Surjectivité de l'exp] (**Zav**), App :  $\forall p \geq 2 \forall A \in GL_n(\mathbb{C}) \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / B^p = A$ , App :  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe.
- ↔ **Szpi ou FGN A13** : Prop :  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2 / A \in GL_n(\mathbb{R})\}$  (**Zav**), Prop :  $\exp: \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$  surj, C-ex.

## III - Applications

### 1) Systèmes différentiels à coefficients constants

- ↔ **Dem ou Szpi** : Prop : dérivée  $t \mapsto \exp(tA)$ , Prop : sol d'un système, Ex, Déf : sol stable et asympt stable, Thm : caract stabilité par les vp, Ex : Van der Pool (**FGN An4**).

### 2) Groupes à un paramètre

- ↔ **FGN A12 ou M-T** : Prop : morph de gpes dérivables de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ , Prop : morph de gpes continus de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ , Prop : morph de gpes continus de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(SL_2(\mathbb{R}), \times)$ , Prop : si  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mathcal{C}^1$  tq  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \varphi(s, t) = \varphi(s)\varphi(t)$  alors  $\exists P, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tq  $P = P^2$  et  $\varphi(t) = P \exp(tA)$  (**FGN A12**).

### 3) Etude d'ensembles particuliers

- ↔ **FGN A12 ou M-T** : Prop : lim de certaines exponentielles, App : si  $G$  ss-gpe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall t \in \mathbb{R} \exp(tM) \in G\}$  alors  $\mathcal{G}$  sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  stable par  $A, B \mapsto AB - BA$ , Prop : si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est tq  $\forall t \in \mathbb{R} \exp(tA) \in SO_n(\mathbb{R})$  alors  $A$  antisym (**FGN A12**).

57.

- Caldero, Germoni, *H2G2* (pour suivre une trame de la leçon)
- Gourdon, *Algèbre*
- Beck, *Objectif Agrégation*
- Merlin, *MéthodiX Algèbre*
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Mneimné-Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 2* (plein de trucs, si on a l'édition de 2009!)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3* (un truc)
- Zavidovique, *Un Max de maths*

**58. Rapport du Jury** : C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la CV de la série  $\exp$ . Les questions de surj ou d'inj doivent être abordées. La décomp de Dunford multiplicative (décomp de Jordan) de  $\exp(A)$  doit être connue. Les gpes à un paramètre peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces ss-gpes constituent des ss-variétés fermées de  $GL_n(\mathbb{R})$ . L'étude du  $\log$  (quand il est défini) trouve tte sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des mat nilp, on pourra invoquer le calcul sur les dev limités. Les app aux équa diff doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par ex faire le lien entre réduc et comport asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un dvpt. Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au pgm de l'agrégé, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. Sans aller si loin, on pourra donner une app de l'exp à la décomp polaire de certains ss-gpes fermés de  $GL_n$  (gpes orthogonaux par ex).

# 157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents. <sup>59 60</sup>

Cadre :  $\mathbb{K}$  un corps,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

## I - Endomorphismes trigonalisables

### 1) Définition et caractérisations

$\Leftrightarrow$  Déf (version endo + version matricielle), Rq :  $u \in \mathcal{L}(E)$  trigble  $\Leftrightarrow$  matrice de  $u$  dans une base qqe est trigble, Thm :  $u$  trigble  $\Leftrightarrow \chi_u$  scindé sur  $\mathbb{K}$ , Ex : [GOU] p.167, Rq : Si  $\mathbb{K}$  alg clos tt endo est trigble, Prop : (trace = somme vp) + (det = produit vp) [GRI] p.173.

### 2) Trigonalisation simultanée

$\Leftrightarrow$  Déf : espaces propres, Prop :  $u$  et  $v$  commutent alors (tt ss-espace propre de  $u$  stable par  $v$ ) et ( $Im(u)$  stable par  $v$ ), Thm : trigonalisation simultanée, Rq :  $u, v$  trigbles qui commutent  $\Rightarrow u + v$  et  $uv$  trigbles [OA] p.167.

### 3) Un outils de réduction

$\Leftrightarrow$  Thm : Lemme des noyaux, Cor :  $\Pi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$  où  $P_i$  irréd 2 à 2  $\neq \Rightarrow E = \bigoplus Ker(P_i^{\alpha_i}(u))$ , Prop :  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  sev stable par  $u$  alors  $u|_F$  trigble [GOU] p.165.

### 4) Propriétés topologiques

$\Leftrightarrow$  Prop : matrices diagbles à vp distinctes dense dans l'ensemble des matrices trigbles, Prop : ensemble des matrices trigbles = fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## II - Endomorphismes nilpotents

### 1) Définition et caractérisations

$\Leftrightarrow$  Déf  $\mathcal{N}$ , Ex : endo de dérivation dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , Déf : indice de nilpotence  $p$ , Rq : Cayley-Hamilton  $\Rightarrow p \leq n$ , Prop :  $u$  nilp d'indice  $p \Rightarrow \exists x_0$  tq  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  libre [GOU] p.149, Prop : caractérisations (dont  $u$  nilp  $\Leftrightarrow u$  trigble de spectre 0), C-ex :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  unique vp réelle 0 mais  $A$  non trigble sur  $\mathbb{R}$ , Prop : si  $car(\mathbb{K}) = 0$  alors  $u$  nilp  $\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, Tr(u^k) = 0)$ , C-ex : si  $car(\mathbb{K}) = p$  alors  $\forall k \in \mathbb{N} Tr(I_p^k) = 0$  et  $I_p$  non nilp, App :

Thm de Burnside

### 2) Structure de $\mathcal{N}$

$\Leftrightarrow$  Prop :  $\mathcal{N}$  = cône, Rq :  $\mathcal{N}$  n'est ni un ev ni un gpe, Prop :  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  nilp et  $f \in \mathcal{L}(E)$  alors (si  $u, v$  commutent,  $u + v$  nilp) et (si  $u, f$  commutent,  $u \circ v$  nilp), Prop :  $Vect(\mathcal{N}) = Ker(Tr)$ .

### 3) Unipotence

$\Leftrightarrow$  Déf  $\mathcal{U}$ , Prop :  $u \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \chi_u = (1 - X)^n$ , Prop : exp réalise homéomor $\varphi$  entre  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{U}$ , App : exp  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  surjective.

## III - Application à la réduction

### 1) Décomposition de Dunford

$\Leftrightarrow$  Thm : Dunford, App : calcul de l'exponentielle de  $u$ , Rq : décomp de Dunford ne facilite pas le calcul de  $exp(u)$  car elle est difficile à trouver, App : sur  $\mathbb{C}$  (exp( $u$ ) diagonalisable)  $\Leftrightarrow$  ( $u$  diagonalisable).

### 2) Réduction de Jordan pour les nilpotents et noyaux itérés

$\Leftrightarrow$  Déf : bloc de Jordan, Prop : ( $\exists$  une base de  $E$  tq  $Mat_B(u)$  est un bloc de Jordan)  $\Leftrightarrow$  ( $u$  nilp d'indice  $n$ ), Thm : décomposition de Jordan pour les nilpotents, Ex : en dim 3  $\chi_u(X) = -(X - \lambda)^3$  et  $\Pi_u = (X - \lambda)^2$  et  $dim(E_\lambda) = 1$  [GRI] p.194, Noyaux itérés.

---

59.

- Xavier Gourdon, *Algèbre*, 2ème édition (pour I-1 & I-2, pour DVPT 2).
- Beck, *Objectif Agrégation*, 2ème édition (pour la majorité, noyaux itérés).
- Grifone, *Algèbre linéaire*, 4ème édition (pour les exemples).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2*, 2ème édition (pour DVPT 1).

**60. Rapport du Jury** : possible de mener une leçon de bon niveau sans la décomp de Jordan avec noyaux itérés. Savoir déterminer si 2 matrices nilp sont semblables d'après noyaux itérés (ou décomp de Jordan si maîtrisée). Etude des nilp en dim 2  $\Rightarrow$  problèmes de quadriques et étude sur un corps fini  $\Rightarrow$  jolis problèmes de dénombrement

## 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes. 61 62

Cadre :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### I - Généralités

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Gourdon** : Déf : matrice symétrique / antisymétrique / hermitienne, Exemple et rq éltés de la diag d'une matrice hermitienne sont réels (**Grifone**), Déf : matrice symétrique (et hermitienne) positive et définie positive, Rq : lien avec valeurs propres, Ex (sans ref) : produit scalaire ds base canonique, Prop :  $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$  et dim, Prop :  $H_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$ , Rq :  $H_n$  est un  $\mathbb{R}$ -ev mais pas un  $\mathbb{C}$ -ev.

#### 2) Lien avec les endomorphismes, les formes bilinéaires symétriques et les formes hermitiennes

↔ **Gourdon** : Déf : forme bilinéaire symétrique, Déf : forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne, Ex : fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ , Ecriture en dim finie, Rq : l'app qui à  $\varphi$  associe sa matrice est un isomorphisme, Ex forme hermitienne (**Grifone**), Changement de base, Déf : forme quadratique, Déf : forme hermitienne, Ex : un dans  $\mathbb{R}_3$  et un sur  $\mathbb{C}^2$ .

↔ **Grifone** : Prop/Déf : adjoint cas euclidien, Prop/Déf : adjoint cas hermitien, Déf : autoadjoint.

### II - Réduction et théorie spectrale

#### 1) Théorèmes spectraux.

↔ **Gourdon** : Prop : M matrice sym (resp hermitienne)  $\exists C$  orthogonale (resp unitaire) tq  $C^{-1}MC = C^*MC = D$  avec D diag réelle, Ex, Déf : endomorphisme/matrice normal(e), Ex : matrices sym et antisym réelles + matrices hermitiennes + ortho + unit, Réduction des endomorphismes normaux

↔ **FGN A13** : App : caractérisation de Sylvester des matrices déf  $> 0$ , Csq :  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  ouvert de  $S_n(\mathbb{R})$ .

#### 2) Conséquences sur les formes quadratiques et les formes hermitiennes.

↔ **Grifone** : Thm : Sylvester sur  $\mathbb{R}$  (resp  $\mathbb{C}$ ) avec déf signature, Ex : sur  $\mathbb{R}^3$ , Ex : signature du déterminant en 2d.

↔ **Gourdon An** : Rq : matrice hessienne est sym, Thm : Lien matrice hessienne et existence d'extremum local.

↔ **Rouvière** : Lemme : Réduction des formes quadratiques version différentiable, Lemme de Morse

#### 3) Pseudo-réduction simultanée.

↔ **Gourdon** : Prop : pseudo-réduction simultanée version hermitienne et quadratique, App : version matricielle,

↔ **FGN A13** : App : convexité logarithmique du déterminant sur  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ , Ellipsoïde de John-Loewner

### III - Décomposition, résolution de systèmes linéaires.

#### 1) Racines carrées et décomposition polaire.

↔ **Gourdon** : Prop : H auto-adjoint positif  $\exists!$  R auto-adjoint positif tq  $H = R^2$ , App :  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in S_n^+(\mathbb{R})$  alors  $AB$  diagble et spectre contenu dans  $\mathbb{R}_+$  (**FGN A13**), Prop : Décomposition polaire, décomp polaire cas sym positive + pts extrémaux de la boule unité (**FGN A13**)

#### 2) Résolution de systèmes linéaire.

↔ **Hiriart-Urruty** : Lemme : inégalité de Kantorovitch, Algorithme du gradient à pas optimal

---

61.

- Gourdon, *Algèbre* (pour I & II-1)
- Grifone, *Algèbre linéaire* (pour I-2 & II-2)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (pour II & III-1)
- Gourdon, *Analyse* (thm matrice hessienne)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (lemme de Morse)
- Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe* (gradient à pas optimal)

62. **Rapport du Jury** : C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. Il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel sous-jacent.

# 159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications. 63 64

Cadre : Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

## I - Généralités

### 1) Formes linéaires

↔ **Gourdon** : Déf : forme linéaire + espace dual et notation, Ex : différentielle, App : dual de  $M_n(\mathbb{K})$  (**FGN**).

↔ **OA** : Prop : une forme linéaire est soit nulle soit surjective, Thm de Riesz.

### 2) Hyperplans

↔ **Gourdon** : Déf : hyperplan, Ex : droite hyperplan de  $\mathbb{R}^2$ , Prop : lien noyau forme linéaire et hyperplan, App : dual de  $M_n(\mathbb{K})$  (**FGN**), Prop : un endomorphisme laissant stables tous les hyperplans est une homothétie.

↔ **Perrin** : Déf : réflexion + matrice, Déf : transvection + matrice, Thm : générateurs de  $SL(E)$  et  $GL(E)$

## II - Dualité

### 1) Bases duales

↔ **Gourdon** : Déf : forme linéaire coordonnée, Thm : base duale et  $\dim E = \dim E^*$ , Ex : dans  $\mathbb{R}^3$ , Ex : polynôme interpolateur de Lagrange.

### 2) Bidual et base antéduale

↔ **Gourdon** : Déf/Prop : base antéduale, Ex, Déf : bidual, Thm : isomorphisme entre  $E$  et son bidual, Rq : cet isomorphisme ne dépend pas de la base.

## III - Application transposée et orthogonalité

### 1) Orthogonalité au sens des formes linéaires

↔ **Gourdon** : Déf : élt's orthogonaux et orthogonal d'une partie Ex : si  $\forall i \neq j e_i$  et  $e_j$  orthogonaux alors  $e_i^*$  et  $e_j^*$  aussi, Ex : si  $\varphi \in E^*$  alors  $\{\varphi\}^\circ = \ker \varphi$ , Thm : si  $F$  sev de  $E$  alors  $\dim F + \dim f^\perp = \dim E$ ,  $F^{\perp\circ} = F$  et si  $G$  sev de  $E^*$  alors  $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ ,  $G^{\circ\perp} = G$ , Csq : Un ss-espace est égal à l'espace tout entier  $\Leftrightarrow$  son orthogonal est nul, App :  $\varphi$  surjective  $\Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_p$  sont linéairement indépendantes, Cor : équation d'un sev, Prop : L'ensemble  $H^\perp$  des formes linéaires sur  $E$  qui s'annulent sur  $H$  est une droite de  $E^*$ .

### 2) Application transposée

↔ **Gourdon** : Déf : application transposée, Prop : relations image et noyau de la transposée, Prop :  ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$ , Prop :  $F$  stable par  $u \Leftrightarrow F^\perp$  stable par  ${}^t u$ , App : trigonalisation simultanée, Prop : la matrice de  ${}^t u$  est la transposée de la matrice de  $u$ , Prop : matrice de passage de  $B^*$  à  $B'^*$ .

## IV - Formes linéaires en analyse

1) ↔ **Gourdon analyse** : Thm des extrema liés, App : diagonalisation des endomorphismes symétriques (**OA**), Inégalité de Hadamard (**Rouvière**), App : inégalité arithmético-géométrique, Interprétation géométrique.

63.

- Gourdon, *Algèbre*
- Beck, *Objectif agrégation*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Grifone, *Algèbre linéaire* (1 exemple)
- Gourdon, *Analyse* (partie IV)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (1 appli)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (dvpt + 1 prop)

**64. Rapport du Jury** : Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique, analytique, etc. Rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire.

## 160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie) 65 66

Cadre :  $E$  un ev euclidien.  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\mathcal{B} = (e_i)_i$  une BON et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ .

### I - Endomorphismes symétriques et antisymétriques

#### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : adjoint, Ex :  $\varphi_A : M \mapsto {}^tAMA$ , Prop de l'adjoint, Déf : endo autoadjoint (=symétrique), Ex : précédent, Rq : la matrice d'un endo autoadjoint est symétrique, Déf :  $f$  positif et déf positif, Déf :  $M$  positive et déf positive + lien avec l'endo, Prop :  $f$  positif (resp. déf positif)  $\Rightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$  (resp.  $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+*}$ ), Déf : endo antisymétrique.

#### 2) Réduction

$\leftrightarrow$  Prop :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , Lem :  $F$  stable par  $f \Rightarrow F^\perp$  stable par  $f^*$ , Thm :  $f$  sym  $\Rightarrow \exists$  BON de  $\vec{v}_p$ , Cor : diagonalisation des matrices sym réelles, Rq : spectre d'une matrice positive et déf positive, Cor : "diagonalisation" d'une forme quadratique, Cor : pseudo-réduction simultanée, App : Ellipsoïde de John-Loewner, App : racine carrée d'une matrice.

### II - Endomorphismes normaux

#### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : endo normal (et d'une matrice normale), Prop :  $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ , Prop : stabilité de l'orthogonal d'un sep, Ex : endo sym et antisym.

#### 2) Réduction

$\leftrightarrow$  Thm :  $f$  normal  $\Leftrightarrow f$  se diagonalise ds une BON  $\Leftrightarrow f$  et  $f^*$  se diagonalisent ds une BON commune, Cor :  $M$  matrice normale  $\Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tq  $P^{-1}MP$  diag, Thm : Réduction des endo normaux, Cor : réduction des matrices antisym, Rq : elles ne sont pas inversibles...

### III - Endomorphismes orthogonaux

#### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : transformation orthogonale, Rq : orthogonal  $\Rightarrow$  normal donc réduction, Prop :  $f$  orthogonale  $\Leftrightarrow f$  isométrie  $\Leftrightarrow A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , Rq : les endo normaux sont caractérisés par  $f \circ f^* = \text{id}$ , Ex : de matrice orthogonale, Prop :  $f$  orthogonal  $\Rightarrow \text{Sp}(f) \subset \{-1; 1\}$  et  $\det f = \pm 1$ , Prop :  $f$  transforme toute BON en une BON, Prop :  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) < \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , Prop :  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) < \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

#### 2) Etude en dimension 2 et 3

$\leftrightarrow$  Prop : forme des matrices de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  et interprétation géométrique (+ dessins), App : forme de la matrice d'un endo orthogonal,  $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$  est simple, Prop : forme des matrices de  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  et interprétation géométrique (+ dessins), Ex : angle et axe de la matrice de l'ex du III.1.

#### 3) Propriétés topologiques

$\leftrightarrow$  Prop :  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est compact, Cor : décomposition polaire, App : Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$ , Prop :  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs, Prop :  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  a deux composantes connexes homéomorphes à  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

65.

- Gourdon, *Algèbre* (pour I.2. et II & DVPT 2)
- Grifone, *Algèbre linéaire* (pour I.1 et III.)
- Audin, *Géométrie* (pour propriétés topologiques)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (Ellipsoïde de John-Loewner,  $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$  simple)

**66. Rapport du Jury** : Les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur.

# 161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3. <sup>67 68</sup>

Cadre :  $\mathcal{E}$  désigne un espace affine euclidien de dimension  $n \geq 1$  et de direction  $E$ .

## I - Généralités

### 1) Définitions

↔ **Mercier** : Déf : isométrie (iso), Ex : translations + homothéties (**Audin**), Thm :  $(f \in Is(\mathcal{E})) \Leftrightarrow (f$  affine de partie lin une appli orthogonale), Rq : tte iso de  $\mathcal{E}$  est bij +  $Is(\mathcal{E})$  ss-gpe de  $GA(\mathcal{E})$ , Déf : gpe des déplacements  $Is^+(\mathcal{E})$  et ensemble des antidéplacements  $Is^-(\mathcal{E})$ , Prop/Déf : stabilisateur de  $O$  dans  $Is(\mathcal{E})$  isomorphe à  $O(E)$  via la partie lin de  $f$ .

### 2) Exemples et propriétés

↔ **Mercier** : Thm : écriture unique  $f = t_{\vec{u}} \circ g$  avec  $\vec{u} \in Inv(L(f))$  et  $g$  une iso avec au moins un point fixe.  
↔ **Audin** : Déf : sym orthogonale + sym orthogonale affine, Rq : réflexion = sym orthogonale par rapport à un hyperplan, Déf : sym glissée (**Combes**)  
↔ **Mercier** : Thm :  $(A_0, \dots, A_n)$  un repère affine et  $(B_0, \dots, B_n)$  tq  $B_i B_j = A_i A_j$  alors  $\exists! f \in Is(\mathcal{E})$  tq  $f(A_i) = B_i$  et  $(B_0, \dots, B_n)$  est un repère affine, App : triangles isométriques.

## II - Etude de $O(E)$

### 1) Réduction et générateurs

↔ **Audin** : Prop :  $F$  sev de  $E$  stable par une iso  $f \Rightarrow F^\perp$  stable par  $f$ , Prop :  $f$  une iso vect de  $E \Rightarrow E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r$  où  $V, W, P_1, \dots, P_r$  sont stables par  $f$  et  $f|_V = Id_V$ ,  $f|_W = -Id_W$ ,  $f|_{P_i} =$  rotation, écriture matricielle, App :  $Is^+(\mathcal{E})$  connexe par arcs.

↔ **Perrin** : Ex : si  $\dim(W) = 1$  et  $r = 0 \Rightarrow f$  est une réflexion, Déf : renversement, Thm :  $O(E)$  engendré par les réflexions ortho, Thm : Tte iso de  $\mathcal{E}$  peut s'écrire comme produit de  $p$  réflexions avec  $p \leq n + 1$  (**Audin**), Thm :  $SO(E)$  engendré par les renversements, App : Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$  (**FGN**).

### 2) Propriétés topologiques

↔ **Audin** : On peut identifier  $O(E)$  et  $O_n(\mathbb{R})$ , Prop :  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.  
↔ **H2G2** Prop : décomposition polaire, Cor : maximalité de  $O_n(\mathbb{R})$ , Points extrémaux de la boule unité (**FGN**)

## III - Classification des isométries du plan et de l'espace

### 1) En dimension 2

↔ **Audin, Combes** : classification des déplacements (translation + rotation) et antidéplacements (réflexion + symétrie glissée) suivant ensemble invariant.

### 2) En dimension 3

↔ **Combes** : classification des déplacements (translation + rotation axiale + vissage) et antidéplacements (symétrie plane + symétrie glissée + rotation-symétrie) suivant point fixe et  $\dim(E_1)$ .

## IV - Groupe d'isométrie préservant une partie du plan ou de l'espace

### 1) Définition

↔ **Mercier** : Déf :  $Is(P)$ , Prop :  $(Is(P), \circ)$  est un groupe.

### 2) Polygones réguliers

↔ **Mercier** : Thm/Déf : polygone régulier à  $n$  sommets  $P_n$ , Thm :  $Is^+(P_n) = \{Id, r, \dots, r^{n-1}\}$  gpe cyclique engendré par  $r$ , Rq :  $Is^+(P_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , Thm : il y a  $n$  réflexions laissant  $P_n$  invariant, Rq : expliciter  $Is^-(P_n)$ , Déf : groupe diédral  $D_n$ , Thm :  $D_n$  gpe fini d'ordre  $2n$  engendré par  $r, s$ , Ex :  $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$ .

### 3) Polyèdres réguliers

↔ **Mercier** : description groupe du cube, groupe du tétraèdre.

↔ **H2G2 ou Alessandri** : Prop : Isométries du cube et du tétraèdre

67.

- Mercier, *Cours de géométrie*. (pour I et IV)
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* (pour II-1)
- Combes, *Algèbre et géométrie* (pour III)
- Audin, *Géométrie* (pour II et III-1)
- Francinou, Gianella, Nicholas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3* (pour dvpt  $SO_3(\mathbb{R})$  et points extrémaux)
- Caldéro, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et géométries* (pour II-2 et III-3)

68. **Rapport du Jury** : La classification en dimension 2 est exigible. En dimension 3, les rotations et les liens avec la réduction. On peut penser aux application aux isométries laissant stables certaines figures en dimension 2 et 3.

## 162 - Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques. <sup>69 70</sup>

### I - Généralités sur les systèmes linéaires

#### 1) Définitions

↔ **Grifone** : Déf : système linéaire et compatible, Ex simples, Expression matricielle, Prop :  $AX = B$  est compatible  $\Leftrightarrow B \in Vect(\text{colonnes des } A)$ , Deux exemples simples.

#### 2) Système de Cramer

↔ **Grifone** : Déf : système de Cramer, Prop : un système de Cramer admet une unique solution, Thm : formules de Cramer, Ex, Complexité (**Ciarlet**).

#### 3) Le cas général

↔ **Grifone** : Thm : Rouché-Fontené, Ex.

### II - Système échelonné et résolution directe

#### 1) Opérations élémentaires

↔ **Grifone** : Prop : les opérations élémentaires ne changent pas un système linéaire.

↔ **H2G2** : Déf : des matrices d'opérations élémentaires et la traduction matricielle des opérations élémentaires.

#### 2) Système échelonné

↔ **H2G2** : Déf : pivot et matrice échelonnée, Ex, Thm : décomposition de  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  grâce aux matrices échelonnées, Rq : toute matrice se met donc sous forme échelonnée.

#### 3) Méthode du pivot de Gauss

↔ **Ciarlet** : Description de la méthode, Complexité, Ex (**Grifone**).

↔ **H2G2** : App : calcul du rang + de l'inverse + recherche d'un système d'équations d'un sev défini par une famille génératrice + recherche d'une base d'un sev défini par un système d'équations + générateurs de  $GL_n$  et  $SL_n$

↔ **FGN A11** : (Thm : Décomposition de Bruhat)

#### 4) Factorisations LU et Choleski

↔ **Grifone/Ciarlet** : Thm : factorisation LU, Rq : utilité pour résoudre des systèmes linéaires, Thm : factorisation Choleski, Complexité, Ex.

### III - Méthodes itératives de résolution de système linéaire

#### 1) Principe des méthodes itératives

↔ **Ciarlet** : Principe des méthodes, Thm : convergence en fonction du rayon spectral.

#### 2) Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation

↔ **Ciarlet** : Descriptions des méthodes, Thm : convergences des méthodes.

#### 3) Méthode du gradient à pas optimal

↔ **Hiriart-Urruty** : La résolution d'un système à matrice symétrique revient à minimiser une fonction, Lemme : inégalité de Kantorovich, Thm : Algorithme du gradient à pas optimal.

---

69.

- Grifone, *Algèbre linéaire* (pour beaucoup)
- Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* (pour beaucoup)
- Carldero-Germoni, *H2G2* (pour les systèmes échelonnés)
- Hiriart,Urruty, *Optimisation et analyse convexe* (pour gradient à pas optimal)

**70. Rapport du Jury** :Le jury n'attend pas une version à l'ancienne articulée autour du théorème de Rouché-Fontené, qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée. La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité!) Par exemple les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de  $GL_n(\mathbb{K})$  sur  $M_n(\mathbb{K})$ . Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué, y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.



# 170 - Forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications. 71 72

Cadre : Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique différente de 2 et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

## I - Généralités

- 1) Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Déf : forme bilinéaire symétrique, Déf/Prop : forme quadratique et forme polaire, Ex :  $\text{tr}({}^tAA)$  (**Gourdon**).
- 2) Expression matricielle  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Déf : matrice d'une forme bilinéaire, Ex et Rq : isomorphisme entre l'ensemble des formes bilinéaires et leur matrice dans une base fixée (**Gourdon**), Thm : chgt de base, Déf : matrice d'une forme quadratique, Ex : dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 3) Rang et noyau d'une forme quadratique  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Déf : rang et noyau d'une forme quadratique + forme quadratique non dégénérée, Déf : définie positive et définie, Prop : une fq définie est non dégénérée, Ex : avec ex précédent, Prop :  $\dim(E) = \dim N(q) + \text{rg}(q)$ .

## II - Orthogonalité et isotropie

- 1) Orthogonalité.  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Déf : vecteurs orthogonaux pour  $q$  + ensemble  $q$ -orthogonal + deux ensembles  $q$ -orthogonaux, Prop :  $A^\perp$  sev de  $E$  et  $E^\perp = N(q)$ , Prop :  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N(q)) + F^{\perp\perp} = F$  et cas particulier si  $q$  non dégénérée, C-ex.
- 2) Isotropie  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Déf : cône isotrope, Rq :  $I(q)$  n'est pas un ev, Ex + figures en annexe :  $q(x) = x_1^2 - x_2^2$  et  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ , Prop :  $N(q) \subset I(q)$ , C-ex : pas inclusion réciproque, Déf : sev isotrope, Rq : Il en existe ssi  $I(q) \neq \{0\}$ , Prop :  $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$  est non isotrope, Ex : dans  $\mathbb{R}^4$ , Ex :  $q(A) = \det(A)$ .
- 3) Groupe orthogonal  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Prop :  $q(f(x)) = q(x) \Leftrightarrow \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \Leftrightarrow f^* \circ f = \text{id}$   $f$  est dit orthogonal relativement à  $q$ , Déf : groupe  $O(q)$ , Prop :  $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^t \mathcal{M}(f) \mathcal{M}(q) \mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(q)$ , Ex :  $q(x) = 2x_1x_2$ .
- 4) Base orthogonale et réduction simultanée  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Déf : base  $q$ -orthogonale, Prop : il existe une base  $q$ -orthonormale, Méthode de Gauss, Ex : dans  $\mathbb{R}^3$ , Thm :  $(E, \langle, \rangle)$  euclidien,  $q$  forme quadratique sur  $E$  alors il existe des bases orthogonales à la fois pour  $\langle, \rangle$  et  $q$ , Ellipsoïde de John-Loewner (**FGN A13**).

## III - Classification des formes quadratiques.

- 1)  $\leftrightarrow$  **Perrin** : Déf : formes sesquilinéaires équivalentes.  
 $\leftrightarrow$  **Grifone** : Sur  $\mathbb{C}$  : Thm : il existe une base tq  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$  où  $r = \text{rg}(q)$ , Cor :  $q$  non dégénérée  $\Leftrightarrow \text{rg}(q) = n \Leftrightarrow \exists \{e_i\}$   $q$ -orthonormée, Cor : il existe une unique classe d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées. Sur  $\mathbb{R}$  : Thm de Sylvester, Ex : signature du déterminant, Cor :  $q$  définie positive  $\Leftrightarrow \text{sign}(q) = (n, 0)$  et  $q$  non dégénérée  $\Leftrightarrow \text{sign}(q) = (p, n - p)$ , Cor : Il y a  $n + 1$  classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées.  
 $\leftrightarrow$  **Perrin** : Corps finis : Thm : il y a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées.

## IV - Application à la géométrie différentielle

- 1)  $\leftrightarrow$  **Gourdon analyse** : Thm :  $f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}q(h) + o(\|h\|^2)$  + lien entre  $f$  admet un extremum local en  $a$  et  $q$  positive/définie positive, Ex : conditions en dim 2, Lemme de Morse.

71.

- Grifone, *Algèbre linéaire* (pour presque tout)
- Perrin, *Cours d'algèbre* (pour les formes quadratiques sur les corps finis)
- Gourdon, *Algèbre* (pour quelques exemples)
- Gourdon, *Analyse* (pour IV)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (Lemme de Morse)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (Ellipsoïde de John-Loewner)

**72. Rapport du Jury** : Ne pas se contenter de travailler sur  $\mathbb{R}$ , savoir que les formes quadratiques existent sur  $\mathbb{C}$  et sur les corps finis, savoir les classifier. Ne pas négliger l'interprétation géométrique des notions induites. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées. L'algo de Gauss doit être énoncé et pouvoir être appliqué sur une forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$ . Maîtriser la notion d'isotropie. Illustrer la leçon avec des exemples naturels.



# 171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications. 73 74

Cadre :  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev.

## I - Forme quadratique et algèbre bilinéaire

### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : appli bilinéaire sym, Déf : fq, Ex en dim infinie (sur  $\mathbb{R}[X]$ ), Prop :  $\exists$  unique appli bilin sym  $\varphi$  tq  $q(x) = \varphi(x, x)$  = forme polaire de  $q$ , identités de polarisation, Ex :  $tr({}^tAA)$ , écriture matricielle en dim finie d'une appli bilin sym, Déf : matrice d'une fq et rang de  $q$ , Rq : rang de  $q$  = rang de sa forme polaire, Ex, changement de base, Déf : noyau de  $q$  + dégénérée/non dégénérée, Rq :  $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow q$  non dégénérée.

### 2) Formes quadratiques positives, définies positives

$\leftrightarrow$  Déf : définie, Déf : positive, Rq : définie positive, Ex :  $tr(A)^2$  positive mais non définie, Prop : définie  $\Rightarrow$  non dégénérée, Rq : réciproque fautive, Thm : inégalité de Schwarz, Cor : inégalité de Minkowsky.

## II - Orthogonalité et isotropie

### 1) Orthogonalité

$\leftrightarrow$  Déf : 2 vecteurs orthogonaux pour  $q$  + orthogonal d'une partie + 2 ss-ensembles orthogonaux, Prop : inclusion des  $\neq$  orthogonaux, Déf : base  $q$ -orthogonale, Thm : existence d'une base  $q$ -orthogonale, Rq : ne pas confondre la recherche d'une bas où  ${}^tPAP$  est diag avec la réduction des endo  $(P^{-1}AP)$ , Prop :  $\dim(E) < \infty$  et  $F$  sev de  $E \Rightarrow \dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) + \dim(F \cap \text{Ker}(q))$ , Rq :  $q$  non dégénérée  $\Rightarrow \dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ .

### 2) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique

$\leftrightarrow$  Déf : adjoint pour  $q$ , Rq : écriture matricielle de l'adjoint, Ex, Prop : équiv caractérisant l'adjoint, Prop :  $O(q) = \{f \in \text{End}(E) | f^*of = id\}$  est un gpe = gpe orthogonal de  $q$ , Prop :  $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tAMA = M$  ( $A$  matrice de  $f$ ), Ex.

### 3) Isotropie

$\leftrightarrow$  Déf : cône isotrope  $I(q)$ , Ex, Prop :  $\text{Ker}(q) \subset I(q)$ , Déf : sev isotrope, Rq :  $\exists$  sev isotrope  $\Leftrightarrow I(q) \neq 0$ , Déf : sev totalement isotrope, Rq :  $F$  totalement isotrope  $\Leftrightarrow F \subset I(q) \Leftrightarrow F \subset F^\perp$ , Ex.

## III - Réduction des formes quadratiques

### 1) Pseudo-réduction simultanée

$\leftrightarrow$  Thm : pseudo réduction simultanée, App : convexité logarithmique du det sur  $S_n^{++}$ , App : Ellipsoïde de John Loewner.

### 2) Théorème de Sylvester

$\leftrightarrow$  Méthode de Gauss, Ex, Thm : de Sylvester, Déf : signature de  $q$ , Ex, Ex :  $\text{sgn}(q)$  si  $q$  déf positive/négative/non dégénérée.

## IV - Applications à la géométrie

### 1) Classification euclidienne des coniques

$\leftrightarrow$  Déf : conique, classification selon la signature de  $q$  : ellipse/hyperbole/parabole.

### 2) Géométrie différentielle

$\leftrightarrow$  Déf : point critique, Prop : déf de la hessienne + il s'agit d'une fq  $Q$ , Prop : min/max relatif en fonction de  $Q$  (déf positive/négative), Lemme de Morse

---

73.

- Xavier Gourdon, *Algèbre*, 2ème édition (I, II-1, pseudo-réduction simultanée).
- Xavier Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (IV-3).
- Grifone, *Algèbre linéaire*, 4ème édition (exemples, II-2, III-2, IV-1-2).
- François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (DVPT 2).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (DVPT 1).

**74. Rapport du Jury :** La preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue ainsi que l'orthogonalisation simultanée. Le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante. Pour les candidats de bons niveaux, l'indicatrice de Schur-Frobenius, sur la possibilité de réaliser une représentation sur le corps des réels, permet une belle incursion de la théorie des représentations dans cette leçon.

# 180 - Coniques. Applications 75 76

## I - Coniques affines

### 1) Définitions

↔ **Ladegaillerie** : Déf : conique par un polynome.

↔ **Audin** : Ex :  $xy = 0$ ,  $x^2 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , Rq : on peut définir une conique par :  $q(O\vec{M}) + L(O\vec{M}) + c = 0$ , Déf : conique propre.

### 2) Réduction de l'équation d'une conique, classification

↔ **Ladegaillerie** : Thm : équations réduites des coniques, Terminologie, Déf : conique à centre, Ex :  $x^2 + 2xy - y^2 - 4x = 0$ .

### 3) Tracé des coniques

↔ **Ladegaillerie** : Méthode pour tracer les coniques, Paramétrisation trigonométrique.

## II - Construction des coniques dans un plan affine euclidien

### 1) Définitions

↔ **Debeaumarché** : Déf : focale des coniques, Prop : équation polaire, Rq : domaine de définition de l'équation polaire.

### 2) Etude de la parabole

↔ **Debeaumarché** : Prop : équation dans un bon repère orthonormé, Coordonnées du foyer et équation de la directrice, Prop : paramétrisation, Construction à la règle et au compas.

↔ **Monier** : Ex :  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ .

### 3) Etude de l'ellipse

↔ **Debeaumarché** : Prop : équation dans un bon repère orthonormé, Déf : axes + sommets + demi-grand et petit axe, Prop : paramétrisation, Valeurs des demi-grand et petit axes, Coordonnées des foyers et équations des directrices, Prop : déf bifocale.

↔ **Monier** : Ex :  $x^2 + xy + y^2 - x + 4y + 5 = 0$ .

### 4) Etude de l'hyperbole

↔ **Debeaumarché** : Prop : équation dans un bon repère orthonormé, Déf : axes + sommets + équilatère, Equations des asymptotes, Prop : paramétrisation, Valeurs des demi-grand et petit axes, Coordonnées des foyers et équations des directrices, Prop : déf bifocale, Prop : équation dans le repère porté par les asymptotes.

↔ **Monier** : Ex :  $r = \frac{1}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$ .

## III - Propriétés géométriques des coniques et applications

### 1) Propriétés liées aux tangentes

↔ **Ladegaillerie** : Prop : équation de la tangente.

↔ **Debeaumarché** : Prop : sur la tangente à une parabole, App : rayons lumineux.

↔ **Monier** : Prop :  $C$  une parabole et  $P, Q \in C \Rightarrow$  la normale en  $P$  (resp  $Q$ ) coupe l'axe en  $M$  (resp  $N$ ), Soit  $I$  le milieu de  $MN$  alors  $IP = IQ$ .

↔ **Debeaumarché** : Prop : sur la tangente à une ellipse, App : rayons lumineux.

↔ **FGN A1 3** : Cercle orthoptique à une ellipse.

↔ ? : Ellipse de Steiner.

↔ **Debeaumarché** : Prop : sur la tangente à une hyperbole.

### 2) Intersections

↔ **Audin** : Prop : sur l'intersection d'une droite et d'une conique, Ex : intersections de droites avec  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ . Prop : pour qu'une droite rencontre une conique en un point double ou soit contenue dedans, il faut et il suffit qu'elle soit tangente.

↔ ? : Thm de Bezout.

### 3) Application aux lois de Kepler

↔ **Debeaumarché** : Prop : La trajectoire d'un point soumis à une accélération centrale newtonienne ou coulombienne est une ellipse, App : lois de Kepler.

---

75.

- Ladegaillerie, *Géométrie* (pour I)
- Audin, *Géométrie* (pour III-2)
- Monier, *Géométrie PCSI-PTSI*, 4ème édition (pour exemples et III-1)
- Debeaumarché, *Manuel de mathématiques, Volume 1* (pour II et III)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3* (pour dvpt cercle orthoptique)

**76. Rapport du Jury** : La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différentes selon les cas. On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien en classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles.

# 181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications. <sup>77 78</sup>

Cadre :  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de dimension  $n$ .

## I - Barycentres

### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : système de points pondérés et fctn de Leibniz. Rmq : fctn de Leibniz bijective ou cste suivant  $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ .  
 Def : barycentre. Propriétés de la barycentration : homogénéité, commutativité, associativité. Def : isobarycentre (et milieu). Application : points remarquables (isobarycentre triangle, parallélogramme, tétraèdre).

### 2) Lien entre sous-espaces affines et barycentration

$\leftrightarrow$  Thm : le sea engendré par  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des barycentres des pts de  $\mathcal{A}$ . Ex : 2 pts engendrent une droite et 3 pts non alignés un plan. Thm :  $F$  est un sea  $\Leftrightarrow F$  stable par barycentration  $\Leftrightarrow F$  stable par barycentration de 2 points qq.

### 3) Repérage

$\leftrightarrow$  Thm : équivalence des familles affinement libres. Def : famille affinement libre. Def : repère affine. rmq :  $(A_0, \dots, A_n)$  repère affine  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  base de l'espace vect associé. Def : syst de coordonnées barycentriques et syst normalisé. Thm : 2 syst de coord barycentriques d'un même point sont proportionnels et unicité du syst de coord barycentriques normalisé. Contre-ex pour  $A_0$  milieu de  $[A_1, A_2]$ .

### 4) Interprétation en termes d'aires

$\leftrightarrow$  Def : aire géométrique. Prop : aires algébriques forment un syst de coord barycentriques. Appli : syst de coord barycentriques du centre du cercle inscrit, du centre du cercle circonscrit, de l'orthocentre.

### 5) Applications des barycentres

$\leftrightarrow$  Def : application affine. Thm : appli affine  $\Leftrightarrow$  elle conserve le barycentre. Thm : Ménélaüs. Thm : Céva

## II - Convexité

### 1) Définitions et première propriété

$\leftrightarrow$  Def : segment. Def : combinaison convexe. Def : partie étoilée et partie convexe. Inégalité de Kantorovitch,  
 Ex : sous-espace affine, boules, segment, les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles, intersection de convexes est convexe, image directe et réciproque d'un convexe par une appli affine, adhérence d'un convexe. Application : ellipsoïde de John-Loewner

### 2) Enveloppe convexe

$\leftrightarrow$  Def : enveloppe convexe. Thm : l'enveloppe convexe de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des barycentres à coeffs positifs de  $\mathcal{A}$ .  
 Thm de Lucas. Prop : Intersection de convexes fermés contenant  $\mathcal{A}$ , cas  $\mathcal{A}$  convexe et compacte, cas  $\mathcal{A}$  ouvert.  
 Rmq : Si  $\mathcal{A}$  fermé alors  $\text{Conv}(\mathcal{A})$  pas forcément fermé. Thm de Carathéodory + Cor [DVP ?]

### 3) Points extrémaux

$\leftrightarrow$  Def point extrémal, Ex :  $\text{Extr}(\overline{B(O, r)}) = S(O, r)$ . Prop :  $M$  dans  $\text{Extr}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$  privé de  $M$  convexe  $\Leftrightarrow$  si  $M$  est combinaison convexe d'éelts de  $\mathcal{A}$  alors il est égal à l'un deux.  
Application : pts extrémaux de la boule unité de  $L(E)$ .

### 4) (Résultats de séparation)

$\leftrightarrow$  Thm : Hahn-Banach géométrique. C-ex :  $\mathcal{A}$  non ouvert. Def : Hyperplan séparant/séparant strictement. Coro de Hahn-Banach avec les séparations d'ouverts, fermés, compacts, Thm de Krein-Milman.

### 5) (Théorème de Helly)

$\leftrightarrow$  Lemme de Helly. Thm de Helly

---

77.

- D-J Mercier, *Cours de géométrie Préparation au CAPES et à l'agrégation*, 2ème édition (I.1,I.2,I.3,I.5) (ou dans Fondamentaux de géométrie pour les concours)
- B Truffault, *Géométrie élémentaire* (I.4,I.5)
- P Tauvel, *Géométrie*, 2ème édition (tout le II)
- Francinou, Gianella, Nicholas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (pour les DVPT)

78. **Rapport du Jury** : On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

# 182 - Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies. <sup>79 80</sup>

Cadre :

## I - Géométrie euclidienne

### 1) Géométrie euclidienne et nombres complexes

↔ Déf : affixe + parties réelle et imaginaire + expression du produit scalaire et dét de 2 vecteurs en fonction de Im et Re, App : colinéarité + équation de droite + norme + aire d'un triangle + affixe du centre de gravité et de l'orthocentre d'un triangle.

### 2) Angles.

↔ Prop : existence et unicité de la rotation + relation d'équivalence + mesure de l'angle, Ex :  $\pi$  mesure de l'angle plat, Déf : coordonnées polaires, App : caractérisation des triangles équilatéraux.

### 3) Transformations du plan

↔ Déf : similitude directe, Prop : une similitude est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation, Cor : conservation des angles + une droite est envoyé sur une droite + un cercle de rayon  $R$  est envoyé sur un cercle de rayon  $kR$ , Prop : si  $f$  linéaire et conserve les angles alors  $f$  similitude directe, cas particulier des transformations orthogonales.

### 4) Polynômes et barycentre

↔ Déf : barycentre + affixe du barycentre, Thm : de Lucas, thm ellipse de Steiner

## II - Droite projective complexe

### 1) Définitions

↔ Espace (quotient) des droites vectorielles de  $\mathbb{C}^2$ , complétion projective de la droite affine complexe, sphère unité  $S^2$  de l'espace  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$  via la projection stéréographique.

### 2) Homographies

↔ Déf : homographie, Prop : les homographies de  $P_1(\mathbb{C})$  forment un groupe pour la composition qui est isomorphe à  $GL_2(\mathbb{C})/\{\text{homothéties}\}$ , une homographie peut s'écrire  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $PGL_2(\mathbb{C})$  est engendré par les similitudes directes et  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , les élts de  $PGL_2(\mathbb{C})$  conservent les angles, Automorphismes de  $\mathbb{K}(X)$

### 3) Birapport

↔ Prop/déf : birapport,  $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} \cdot \frac{c-b}{c-a}$ , Déf : division harmonique, Prop :  $f$  bijection de  $P_1(\mathbb{C})$  est une homographie  $\Leftrightarrow f$  conserve les birapports.

### 4) Groupe circulaire

↔ Prop : 4 points de  $\mathbb{C}$  sont alignés ou cocycliques  $\Leftrightarrow$  leur birapport soit réel, Prop : tte homographie de  $P_1(\mathbb{C})$  transforme une droite ou un cercle de  $\mathbb{C}$  en une droite ou un cercle de  $\mathbb{C}$ , Déf : groupe circulaire, Prop : le groupe circulaire est engendré par les inversions et les réflexions, Thm : les éléments du groupe circulaire sont les transformations qui préservent l'ensemble des cercles et droites.

---

79.

- Michèle Audin, *Géométrie* (pour presque tout).
- J-D Eiden, *Géométrie analytique classique* (pour caractérisation des triangles équilatéraux).
- Ivan Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale*, 2ème édition (pour I-3).
- Mercier, *Cours de géométrie-Préparation au CAPES et à l'agrégation* (pour I-4).

80. **Rapport du Jury** : Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe  $SU_2$  dans les corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.

## 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. 81 82

### I - Quelques outils de dénombrement

#### 1) Ensembles finis

↔ **De Biasi** : Déf : ensemble fini et cardinal, Rq : si  $A$  fini et  $f : A \rightarrow B$  bijective alors  $|A| = |B|$ , Prop : cardinal de la réunion de 2 ensembles finis, Prop : cardinal de la réunion de  $n$  ensembles finis 2 à 2 disjoints, Prop : formule du crible, App : il y a 684 nbs de 3 chiffres contenant au moins 0,3,6 ou 9, Déf : produit cartésien, Prop : cardinal d'un produit cartésien, App : tirages ordonnés (successifs) avec remise, App : Nbs de parties d'un ensemble  $A$  à  $n$  élts, App : alphabet Braille, App : cardinal de l'ensemble des applications d'un ens à  $n$  élts dans un ens à  $p$  élts.

#### 2) Arrangements, permutations et combinaisons

↔ **De Biasi** : Déf : arrangement  $p$  à  $p$ , Thm :  $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$ , Ex : tirages ordonnés sans remise, Déf : permutation, Rq : nb de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments est  $n!$ , App :  $|\mathfrak{S}_n| = n!$ , Déf : combinaison, Thm :  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ , Prop : sur les combinaisons, App : tiercé dans le désordre, Prop : formule du binôme de Newton, App : inverse de la matrice de Pascal, App : nb de surjections de  $[1; n]$  dans  $[1; p]$ , App : nb de dérangements.

#### 3) Autres principes

↔ **De Biasi** : Prop : lemme des bergers.

↔ **Perrin** : App : nb de carrés dans  $\mathbb{F}_p$ .

↔ **Combes** : App : théorie des groupes (formule des classes), Prop : principe du double comptage (sans ref), App : formule de Burnside, Ex : colliers de perles, Principe des tiroirs (sans ref).

#### 4) Dénombrement et théorie des corps

↔ **Perrin** : Prop : cardinaux de groupes classiques, App : p-Sylow de  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ , App : isomorphismes exceptionnels.

↔ **Max de math** : Thm Chevalley Warning, Appli : Thm EGZ, Ex.

### II - Utilisation des séries formelles et séries entières.

1) ↔ **Saut-Picart** : Déf : série génératrice, Appli : Partitions d'un entier en parts fixées (FGN An2), App : nombres de Catalan.

↔ **De Biasi** : App : nb d'involutions d'un ensemble à  $n$  élts,

↔ **FGN A11** : Prop : Nombres de Bell.

### III - Fonctions multiplicatives.

#### 1) Indicatrice d'Euler.

↔ **Perrin** : Déf : fonction d'Euler, Prop :  $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$ , Ex : si  $p$  premier  $\varphi(p) = p-1$  et  $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ , Prop : multiplicativité de la fonction d'Euler et Prop :  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$  (**Combes**), App : si  $\mathbb{K}$  est un corps fini alors  $\mathbb{K}^*$  est cyclique.

#### 2) Fonction de Möbius.

↔ **Perrin** : Déf : fonction de Möbius, Ex :  $\mu(42) = -1$ , Prop : si  $m \wedge n = 1$  alors  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ , Prop :  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ , Formule d'inversion de Möbius, App :  $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)d$ .

↔ **FG** : App : Polynômes irréductibles de  $\mathbb{F}_q$ .

---

81.

- Jean de Biasi, *Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne*, 3ème éd
- Combes, *Algèbre et géométrie*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Zavidovique, *Un max de math* (Chevalley Warning et EGZ)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (Nombres de Bell)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2* (partitions d'un entier en parts fixées)
- Saux-Picart, *Cours de calcul formel : algorithmes fondamentaux*

**82. Rapport du Jury** : Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

## 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications. 83 84

Cadre :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I - Espace de fonctions régulières

$(X, d)$  un espace métrique et  $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -ev des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{K}$ .

#### 1) Généralités

↔ **Gourdon** : Prop : unif continue  $\Rightarrow$  continue, C-ex :  $1/x$  sur  $]0, 1[$ , Ex : fcts lipschitziennes, Thm : Heine, Prop :  $X$  compact  $\Rightarrow f$  bornée et atteint ses bornes, **On considère  $X$  compact dans toute la suite.**

↔ **Hirsch-Lacombe** : Déf : norme uniforme, Prop :  $(\mathcal{C}(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$  Banach, Rq : le thm de Baire est vérifié.

↔ **Z-Q** : Déf :  $\mathcal{C}^k$  et  $\mathcal{C}^\infty$ , Prop :  $\mathcal{C}^k$  et  $\mathcal{C}^\infty$  complets.

#### 2) Parties compactes

↔ **Hirsch-Lacombe** : Déf : partie équicontinue, Ex : fonctions  $k$ -lipschitziennes, Thm : Ascoli, App : opérateur linéaire à noyau continu.

↔ **Z-Q** : App : Thm Arzela Peano.

#### 3) Parties denses

↔ **Gourdon** : Thm Weierstrass, App :  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$  tq  $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$  alors  $f = 0$ , Thm : Densité des fonctions continues nulle part dérivables, Ex : d'une telle fct.

#### 4) Fonctions analytiques (ou holomorphes)

↔ **Amar-Matheron ou OA** : Déf : fct holomorphe, Ex, Thm : Cauchy, Thm : formule de Cauchy, App :  $f$  holo sur  $\Omega \Leftrightarrow f$  analytique sur  $\Omega$ , Thm : principe du prolongement analytique, Thm : ( $f_n$  holo CVU sur tt compact vers  $f$ )  $\Rightarrow$  ( $f$  holo et  $f'_n$  CVU sur tt compact vers  $f'$ ), App : fonction  $\zeta$  de Riemann, Thm :  $H(\Omega)$  ss-espace fermé de  $\mathcal{C}(\Omega) + f \mapsto f'$  continue.

### II - Espace des applications linéaires continues

1) ↔ **Gourdon** : Ici  $E$  et  $F$  sont des evn sur  $\mathbb{K}$ , Thm : conditions équiv de continuités pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , Déf :  $\mathcal{L}_c(E, F)$  et norme subordonnée, Prop : ss-multiplicativité de la norme +  $\mathcal{L}_c(E)$  est un alg normée, Thm :  $F$  Banach  $\Rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$  Banach, App :  $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$  Banach, Prop : ( $f$  forme lin sur  $E$  est continue)  $\Leftrightarrow$  ( $\text{Ker}(f)$  fermé de  $E$ ), Prop : en dim finie tte appli lin est continue, Thm : Banach-Steinhaus (**Brézis**), App : existence de fcts continues différentes de leur série de Fourier.

### III - Espaces $L^p$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

#### 1) Structure

↔ **Briane-Pages** : Déf :  $L^p$  pour  $1 \leq p < \infty$ , Thm : Hölder, Thm : Minkowski, Thm : Fischer-Riesz (**Brézis**), Cor :  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \Rightarrow \exists$  ss-suite qui CV  $\mu$ -p.p et bornée  $\mu$ -p.p par une fct ds  $L^p$  (**Brézis**), Prop :  $L^2$  Hilbert, Rq :  $L^2$  vérifie thm de proj sur convexe fermé + thm Riesz.

#### 2) Parties denses

↔ **Briane-Pages** : Thm : densité des fct continues à supp compact dans  $L^p$ .

↔ **Brézis** : Thm/Déf : produit de convolution, Prop : ( $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ )  $\Rightarrow$  ( $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ ), Déf : suite régularisante, Ex, Thm :  $\rho_n * f \rightarrow f$  dans  $L^p$ , Cor : densité de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$  dans  $L^p$ , Prop :  $L^1 \cap L^2$  dense dans  $L^2$  (**pas de réf**), App : prolongement de la transformée de Fourier à  $L^2$  (**pas de réf**).

↔ **OA** : Déf : fct poids  $\rho$ , Déf :  $L^2(I, \rho)$  + prod scal associé, Prop/Déf : existence et unicité d'une famille de poly orthogonaux, Thm : Densité des polynômes orthogonaux.

#### 3) Relations d'inclusion

↔ **Briane-Pages** : Prop : si mesure finie alors  $L^q \subset L^p$  pour  $1 < p \leq q$ , C-ex : si mesure infinie.

83.

- Gourdon, *Analyse* (pour I-1-3 et II)
- Zuilly Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour I-1 et thm Arzela Peano)
- Hirsch Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle* (pour I-1-2)
- (Amar Matheron, *Analyse complexe*)
- Briane, Pages, *Théorie de l'intégration* (pour III)
- Brézis, *Analyse fonctionnelle* (pour Banach-Steinhaus et III)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour densité des polynômes orthogonaux et I-4)

**84. Rapport du Jury** : C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il veut se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact et de fonctions holomorphes offrent des possibilités de leçons de qualités avec des résultats intéressants. Il est regrettable de voir des candidats qui auraient eu intérêt à se concentrer sur les bases de la convergence uniforme, proposer en développement le théorème de Riesz-Fisher dont il ne maîtrise visiblement pas la démonstration. Pour les candidats solides, les espaces  $L^p$  offrent de belles possibilités. Signalons que des candidats proposent assez régulièrement une version incorrecte du théorème de Müntz pour les fonctions continues. La version correcte dans ce cadre est :  $\text{Vect}(1, x^{\lambda_n}) = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ . Des candidats aguerris peuvent développer la construction et les propriétés de l'espace de Sobolev  $H_0^1(]0, 1[)$ , ses propriétés d'injection dans les fonctions continues, et évoquer le rôle de cet espace dans l'étude de problèmes aux limites elliptiques en une dimension. Ce développement conduit naturellement à une illustration de la théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

## 202 - Exemples de parties denses et applications. 85 86

Cadre :  $(E, d)$  un espace métrique.  $A$  une partie de  $E$ .

Déf : partie dense. Caractérisation séquentielle.

### I - Exemple de parties denses dans des espaces de dimension finie

#### 1) Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$  Prop : Caractérisation des parties denses dans  $\mathbb{R}$ , Ex :  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  denses dans  $\mathbb{R}$ , App : le seul morphisme de corps de  $\mathbb{R}$  est l'identité, Prop : ss-groupes additifs de  $\mathbb{R}$ , App :  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  dense dans  $\mathbb{R} \Leftrightarrow a/b \notin \mathbb{Q}$ , App : condition de densité sur  $\{e^{i2\pi n\theta} / n \in \mathbb{Z}\}$  dans  $S^1$ , App : Déf suite équirépartie et Critère de Weyl, Prop : densité des dyadiques, App : condition pour qu'une fonction soit convexe.

#### 2) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$  Prop : matrices inversibles denses dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , App :  $\chi(AB) = \chi(BA)$  + Cayley-Hamilton + différentielle du det, Prop :  $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  denses dans  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ , Cor :  $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$  dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , Rq :  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$  non dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , App : non continuité de l'appli qui a une matrice associée  $D$  dans sa décomp de Dunford.

### II - Densité dans les espaces de fonctions

Déf : séparable

#### 1) Théorème de Stone-Weierstrass et applications ( $E$ compact non vide)

$\Leftrightarrow$  Déf : partie séparante de  $\mathcal{C}(E)$ , Thm : Stone-Weierstrass cas réel, Thm : Stone-Weierstrass cas complexe, Ex : les fct lipschitziennes sont denses dans  $\mathcal{C}(E, \mathbb{K})$ , Thm de Weierstrass, App :  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$  tq  $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$  alors  $f = 0$ , Thm : densité des polynômes trigo.

#### 2) Prolongement de fonctions

$\Leftrightarrow$  Thm : prolongement des appli uniformément continues, App : construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

#### 3) Densité dans les espaces $L^p$

$\Leftrightarrow$  Prop : densité des fonctions étagées intégrables dans  $L^p$  et étagées dans  $L^\infty$ , Prop : densité des fonctions continues à support compact, Déf : identité approchée, Thm : densité avec la convolée par une identité approchée, App : densité des fonctions  $C^\infty$  à support compact.

### III - Bases hilbertiennes

#### 1) Espace de Hilbert

$\Leftrightarrow$  Prop : caractérisation de la densité d'un sev, Déf : bases hilbertiennes, Thm : caractérisation des bases hilbertiennes.

#### 2) Polynômes orthogonaux

$\Leftrightarrow$  Déf : fonction poids et  $L^2(I, \rho)$ , Prop :  $L^2(I, \rho)$  muni de son produit scalaire est un Hilbert, Thm : Il existe une unique famille de poly unitaires orthogonaux 2 à 2 tq  $\deg(P_n) = n$ , Ex : poly de Hermite, poly de Legendre, Densité des polynômes orthogonaux + C-ex.

### IV - Théorème de Baire

1)  $\Leftrightarrow$  Lem de Baire, Prop : densité d'une union dénombrable d'intérieurs de fermés tq  $\cup F_n = E$ , App : Fonctions continues nulle part dérivables, App : Thm de l'application ouverte, App : Thm de Banach, App : Thm de Banach-Steinhaus, App : existence de fonctions continues différentes de leurs séries de Fourier.

---

85.

- Gourdon, *Analyse* (pour début du I.1, II.1. et tout IV : Baire)
- Pommelet (pour I.1. et II.2. prolongement de fonctions)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour I.2. exemples des matrices, II.3. densité dans les  $L^p$ , et tout III : bases hilbertiennes)
- Hirsh-Lacombe (pour II.1. : Stone-Weierstrass)
- Zuily-Quéffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour dvpt Weierstrass)
- Gourdon, *Algèbre* (pour densité de  $GL_n$ )
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour différentielle du det)
- Francinou, Gianella, Nicholas, *Oraux X-ENS, Analyse 2* (pour dvpt Critère de Weyl)

**86. Rapport du Jury** : Cette leçon permet d'explorer les questions d'approximations de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Au delà des exemples classiques, les candidats plus ambitieux peuvent aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier.



## 203 - Utilisation de la notion de compacité. 87 88

### I - Généralités

#### 1) Définitions et caractérisations

- ↔ **Gourdon** : Déf : compact, Ex : espace métrique fini, C-ex :  $\mathbb{R}$  n'est pas compact, Ex : les segments de  $\mathbb{R}$  sont compacts (**Pommellet**), Prop : compact  $\Rightarrow$  borné, Prop : dans un compact une suite décroissante de fermés non vide est non vide, Prop : union finie et intersection quelconque de compacts sont compactes, Thm : Bolzano-Weierstrass.
- ↔ **Pommellet** : Thm : ss-espace fermé d'un espace métrique compact est compact, Cor : parties compactes de  $\mathbb{R}$ , Prop : tout intervalle de  $\mathbb{R}$  peut s'écrire comme réunion croissante de segments, App : [Cauchy Lipschitz global], Thm : dans un compact une suite converge  $\Leftrightarrow$  elle possède au plus une valeur d'adhérence, App : graphe fermé compact.
- ↔ **Nourdin** : Lem :  $(e^{itx_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, App : limite en loi d'une suite de va gaussienne est gaussienne.

#### 2) Extraction diagonale

- ↔ **Hirsch-Lacombe** : Thm : extraction diagonale, Coro : Tychonoff.
- ↔ **FGN Ana2** : Appli : [Compacité de l'opérateur de convolution], Thm : [Helly et Dini], App :  $\sqrt{t}$  est une suite de fct polynômes sur  $[0, 1]$  (**Nourdin**).

### II - Fonctions continues sur un compact

#### 1) Extremums

- ↔ **Gourdon** : Prop : l'image continue d'un compact est un compact, C-ex :  $\sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$  (**Hauchecorne**), Prop : Si  $f$  de  $E$  compact dans  $F$  continue bij alors  $f^{-1}$  continue, Prop : appli continue sur un compact atteint ses bornes, App : Rolle, App : [John-Loewner] (**FGN Alg3**).
- ↔ **Pommellet** : Prop : Si  $f$  coercive alors  $f$  minorée et atteint son min, App : D'Alembert-Gauss, App : distance d'un point à une partie, Appli : Polynômes de meilleure approximation.

#### 2) Théorème de Heine

- ↔ **Pommellet** : Thm : Heine, Ex : fct continue périodique, Ex : fct continue avec limites finies en  $\pm\infty$ , App : fct continue sur un segment est limite uniforme de fct affines par morceaux, App : Weierstrass trigo et Critère de Weyl, Thm : Dini (2e partie **FGN Ana2**), App : continuité et dérivabilité intégrale à paramètres sur un segment (**Gourdon**).

#### 3) Théorèmes de point fixe

- ↔ **Gourdon** : Thm : fct contractante dans un compact a un unique pt fixe, C-ex : si pas compact, App : point fixe sur un compact convexe d'un evn.

### III - Compacité dans les evn

#### 1) En dimension finie

- ↔ **Gourdon** : Prop : parties compactes de  $\mathbb{R}^n$ , Thm : norme équivalente en dim finie, App : continuité des appli linéaire en dim finie, C-ex : en dim infinie, App : [ss-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$ ] (**Alessandri**), Cor : parties compactes d'un evn de dim finie, Thm : Riesz.

#### 2) Espaces de fonctions

- ↔ **Hirsch-Lacombe** : Déf : séparante, Thm : Stone-Weierstrass réel, App : Weierstrass, Ex : fcts lipschitziennes, Déf : équicontinue, Thm : Ascoli, App : opérateur à noyaux.
- ↔ **Zuily-Queffelec** : Thm : Cauchy-Peano, C-ex : pas d'unicité.

---

87.

- Gourdon, *Analyse* (pour I-1, II-1-3 & III-1)
- Pommellet, *Cours d'analyse* (pour I-1, II-1-2 & III-1)
- Hirsch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle* (pour Stone-Weierstrass)
- Nourdin, *Oral agrégation ou un truc comme ça* (pour I-1, Glivenko Cantelli et qqes ex)
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour Cauchy-Peano)
- (Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 2* (pour compacité op de convolution, Helly et Dini)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3* (pour John Loewner)
- Alessandri, *Thèmes de géométrie* (pour ss-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$ )

88. **Rapport du Jury** : Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité), sans proposer des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, etc.). La leçon peut être aussi avantageusement illustrée par des exemples d'opérateurs à noyau et l'analyse de leur compacité par le théorème d'Ascoli, par exemple. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié (lien avec la coercivité en dimension finie). Pour les candidats solides, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs autoadjoint compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales.

## 204 - Connexité. Exemples et applications. <sup>89 90</sup>

Cadre : Soit  $(E, d)$  un espace métrique.  $A$  une partie de  $E$ . On munit  $A$  de la distance  $d$  sur  $A$ .

Motivations : Passer du local au global. Notions très intuitives : archipel.

### I - Généralités

#### 1) Définitions

↔ **Gourdon** : Prop :  $\#$  de partition en 2 ouverts  $\Leftrightarrow$  idem en 2 fermés  $\Leftrightarrow$  seules parties ouvertes et fermées sont  $\emptyset$  ou  $E$ , Déf : espace connexe (CO), Ex :  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ , C-ex :  $\mathbb{Z}$ , Déf : partie CO (**Quéffelec**), Lem : de passage des douanes, Ex :  $\mathbb{Q}$  non CO de  $\mathbb{R}$ .

↔ **Quéffelec** : Prop : caract des CO avec une app continue dans  $\mathbb{Z}$  est cste, Rq : marche aussi si l'app va dans  $\{0, 1\}$ , App.

#### 2) Stabilité de la notion de connexité

↔ **Gourdon** : Thm : si  $f$  continue ( $E$  CO)  $\Rightarrow$   $(f(E))$  CO, Prop : si  $A$  partie CO et  $B$  tq  $A \subset B \subset \bar{A}$  alors  $B$  est CO, Plusieurs prop sur  $\cup$  de convexes, C-ex :  $\{0\}$  et  $\{1\}$  CO de  $\mathbb{R}$  mais pas de  $\{0, 1\}$ , C-ex : une  $\cap$  n'est pas CO  $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \cap \mathbb{R}$  (**Hauchecorne**), Prop : produit cartésien est CO.

#### 3) Exemple de $\mathbb{R}$

↔ **Quéffelec** : Prop : CO de  $\mathbb{R}$  = intervalles, TVI, Thm de Brouwer en dim 1, (App : Thm de Sarkowski)

#### 4) Composantes connexes

↔ **Quéffelec** : Déf : relation d' $\sim$  ici, Déf : comp CO  $C(x)$ , Rq : les comp CO forment une partition, Prop :  $C(x)$  réunion des CO contenant  $x + C(x)$  fermé, Rq : être CO  $\Leftrightarrow$  n'avoir qu'une seule comp CO, Prop :  $X = \bigsqcup$  (ouverts CO non vides)  $\Rightarrow$  ce sont les comp CO, Ex/C-ex :  $] - \infty, x] \cup [y, +\infty[$  2 comp CO et pas CO.

### II - Notions liées à la connexité

#### 1) Définition et propriétés de la connexité par arcs

↔ **Quéffelec** : Déf : chemin, Déf : CO par arcs (CPA), Ex :  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , Thm : CPA  $\Rightarrow$  CO et réciproque si ouvert d'un evn, App : Surjectivité de l'exponentielle, Ex : de l'épigraphe d'une fonction continue, C-ex : espace CO et pas CPA (**Gourdon**).

#### 2) Connexité par lignes brisées (dans un $\mathbb{R}$ -evn)

↔ **Gourdon** : Déf : ligne brisée, Déf : CO par lignes brisées (CLB), Prop : convexe  $\Rightarrow$  CLB  $\Rightarrow$  CPA  $\Rightarrow$  CO, Thm : partie ouverte CO d'un  $\mathbb{R}$ -evn  $\Leftrightarrow$  CLB, C-ex : cercle.

### III - Applications de la connexité

#### 1) Analyse réelle

↔ **Gourdon** : Thm de Darboux.

↔ **Rouvière** : Thm : différentielle bornée compliquée  $\Rightarrow$  inégalité de la moyenne, Coro :  $U$  CO et si  $Df = 0$  alors  $f$  constante, Thm de Brouwer en dim 2

↔ **Quéffelec** : Prop : homéomorphisme échange les comp CO, Ex :  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  non homéo (**Gourdon**).

#### 2) Analyse complexe (à raccourcir selon l'envie)

↔ **Rudin** Déf : domaine, Thm/Déf : indice à valeurs entières cste (ou nulle) sur les comp CO de l'ouvert, Thm : de Cauchy dans un conv donc CO, Formule de Cauchy sur un conv (donc CO), Thm des zéros isolés, Cor : Principe du prolongement analytique, Thm de Liouville, (App : d'Alembert-Gauss (**Gozard**)), Principe du max global (**OA**), Thm : de l'image ouverte, (Prop : si  $f$  non cste est holo sur un domaine alors ni  $\operatorname{Re}(f)$  ni  $\operatorname{Im}(f)$  ne peuvent avoir d'extremum local).

#### 3) Applications aux groupes matriciels

↔ **Mneimé-Testard** : Prop : les ouverts CO de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont CPA et donc  $GL_n(\mathbb{R})$  non CO et  $GL_n(\mathbb{C})$  CO donc CPA, Prop : l'ensemble des projecteurs de rang  $p$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est connexe.

↔ **Mneimé-Testard** : Prop :  $(G/H$  et  $H$  CO)  $\Rightarrow$   $(G)$  CO, Prop :  $GL_n^+(\mathbb{R})$  est CO, Cor :  $GL_n(\mathbb{R})$  a 2 comp CO homéo, Prop :  $SL_n(\mathbb{R})$   $SL_n(\mathbb{C})$  sont CO, Thm :  $SO_n(\mathbb{R})$  est CO,  $O_n(\mathbb{R})$  a 2 comp CO homéo, App :  $SO_3(\mathbb{R})$  est simple (**FGNA13**).

89.

- Gourdon, *Analyse* (pour presque tout I. et II.)
- Quéffelec, *Topologie* (pour presque tout I. et II.)
- Rudin, *Analyse réelle et complexe* (pour l'analyse complexe)
- Mneimé-Testard, *Intro à théorie des gpes de Lie classiques* (pour les gpes matriciels et la théorie des gpes)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples de Mathématiques* (pour ...)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour application à l'analyse réelle)
- Beck, *Objectif agrégation* (pour principe du max)
- Zavidovique, *Un Max de Maths* (pour dvpt surjectivité de l'exponentielle)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3* (simplicité de  $SO_3$ )

**90. Rapport du Jury** : Il est important de présenter des résultats naturels dont la démo utilise la connexité; par ex, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. Rq : mettre plein de dessins.

## 205 - Espaces complets. Exemples et applications. <sup>91 92</sup>

Cadre :  $(M, d)$  un espace métrique.  $d'$  une autre distance sur  $M$ .  $L \subset M$ .  $d_0(x, y) := |x - y|$ .

### I - Espaces complets

#### 1) Suites de Cauchy

↔ **Albert** : Déf : suite de Cauchy (sc), Prop : toute suite CV est une sc, Ex :  $1/n$  (**Hauchecorne**), C-ex : une suite de rationnels qui CV vers  $\sqrt{2}$  est une sc dans  $\mathbb{Q}$  mais ne CV pas ds  $\mathbb{Q}$ , Déf : espace complet + Banach + Hilbert, Ex :  $(\mathbb{R}, d_0)$  est complet, Rq :  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet, (Prop : l'image par une app UC d'une sc est une sc), Déf : distances équiv au sens uniforme, Cor : si  $d$  et  $d'$  sont équiv au sens uniforme alors  $((M, d)$  complet)  $\Leftrightarrow ((M, d')$  complet), Rq : la complétude n'est pas une notion topo  $(]0, 1], d_0)$  non complet mais  $(]0, 1], \left| \frac{1}{\cdot} - \frac{1}{\cdot} \right|)$  l'est (**Hauchecorne**), Prop : sc + valeur d'adhérence  $\Rightarrow$  CV, Cor : métrique compact  $\Rightarrow$  complet, Réciproque fausse :  $\mathbb{R}$ .

#### 2) Propriétés des espaces complets

↔ **Albert** : Prop :  $L$  complet  $\Rightarrow L$  fermé, Prop :  $M$  complet +  $L$  fermé  $\Rightarrow L$  complet, Prop : produit d'espaces complets est complet, Ex :  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}$ , Prop : un evn de dim finie est complet, Prop : complet  $\Leftrightarrow$  propriétés fermés emboîtés (**Queffelec**),

↔ **Gourdon** : App : sous de bonnes conditions  $f(\cap E_n) = \cap f(E_n)$ , Prop : un espace est de Banach  $\Leftrightarrow$  toute série ACV est CV.

### II - Exemples d'espaces complets

$E$  un Banach,  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un Hilbert

#### 1) Espaces de fonctions

↔ **Albert** : Prop :  $(B(M, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach, Cor :  $(C_b(M, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach, Cor : si  $K$  est un espace métrique compact,  $\mathcal{C}(K, E)$  est un espace de Banach.

#### 2) Applications linéaires continues

↔ **Albert** : Prop : si  $F$  evn alors  $\mathcal{L}_c(E, F)$  est un espace de Banach, App : si  $F$  evn alors  $F'$  dual topo est un Banach.

↔ **Gourdon** : Prop : inverse de  $\text{Id} - u$ , App :  $GL_c(E)$  ouvert de  $\mathcal{L}_c(E)$ .

#### 3) Espaces $L^p$

↔ **Brézis** : Déf :  $L^p + L^\infty$ , Inégalité de Hölder, Inégalité de Minkowski, Thm de Riesz-Fischer.

#### 4) Espaces de Hilbert

↔ **OA** : Ex :  $\ell^2(\mathbb{N}) + L^2$ , Thm : projection sur un convexe fermé, App : thm de représentation de Riesz, App : adjoint d'un endo, (App : Dualité des  $L^p$ .)

### III - Théorèmes fondamentaux sur la complétude

#### 1) Prolongement de fonctions

↔ **Albert** : Thm : prolongement uniformément continu, Cor : thm de prolongement pr une appli linéaire continue, App : construction de l'intégrale de Riemann à partir de l'ensemble des fonctions étagées.

#### 2) Théorème de point fixe

↔ **Albert** : Thm du point fixe, C-ex :  $f(x) = \mathbb{1}_{x < 0} + (x + \frac{1}{1+x})\mathbb{1}_{x \geq 0}$ , App : thm de Cauchy-Lipschitz.

↔ (**Rouvière** : TIL, Thm : fonctions implicites.)

#### 3) Théorème de Baire

↔ **Gourdon** : Lem de Baire, Cor : avec les fermés, App : un evn à base dénombrable n'est pas complet, App :

Fonctions continues nulle part dérivables (**ZQ**), App : Thm de Banach-Steinhaus, App : existence de fonctions continues différentes de leurs séries de Fourier.

---

91.

- Albert, *Topologie* (pour presque tout I, début II, début III)
- Gourdon, *Analyse* (pour qq trucs I et II et III.3 Thm de Baire et applications)
- Brézis, *Analyse fonctionnelle* (pour II.3.  $L^p$ )
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour II.4. espaces de Hilbert)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en Mathématiques* (pour 1 ex et 1 c-ex)
- Queffelec, *Topologie* (pour une prop : fermés bornés)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour TIL et thm fonctions implicites)

**92. Rapport du Jury** : Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des thm d'existence en dim infinie, en particulier dans les espaces de fct. Rappelons que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la CVU. Le thm de Cauchy-Lipschitz, mal maîtrisé par bcp de candidats, est un point important de cette leçon. Les espaces  $L^p$  sont des ex pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles. Le thm de Baire trouve naturellement sa place dans cette leçon, mais il faut l'accompagner d'appli. Rappelons que celles-ci ne se limitent pas aux thm de Banach-Steinhaus et du graphe fermé, mais qu'on peut évoquer au niveau de l'agrég l'existence de divers objets : fct continues nulle part dérivables, points de continuité pour les limites simples de suites de fct continues, vecteurs à orbite dense pour certains opérateurs linéaires, etc. Les candidats prendront toutefois garde à ne pas présenter des appli de ce thm au dessus de leur force.

## 206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications. 93 94

### I - Points fixes et complétude

#### 1) Théorème de Picard

↔ **Rouvière** : Thm : point fixe de Picard, C-ex : pas complet  $F(x) = \frac{x}{2}$  sur  $]0, 1[$ , C-ex :  $F(I) \not\subseteq I$   $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  sur  $[0, 1]$ , C-ex : pas strict contractante *id* infinité de points fixes, Rq : une fonction non strict contractante peut avoir un point fixe avec  $\sin(x)$ , App : thm de Picard pour les fonctions différentiables, Rq : le thm reste vrai si une itérée est strict contractante (**Demailly**), Thm : point fixe à paramètre, Ex :  $x = \frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1$  et  $y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - t - \frac{1}{2}$ .

#### 2) Application aux équations différentielles et intégrales

↔ **Rouvière** : Thm : Cauchy-Lipschitz global, App : équation du pendule, C-ex : non unicité avec  $y' = 3|y|^{3/2}$  et  $y(0) = 0$ , Thm : équation intégrale de Fredholm, Thm : équation intégrale de Volterra.

#### 3) Application au calcul différentiel

↔ **Rouvière** : Thm : Inversion locale, Méthode avec le point fixe, App : racine k-ième d'une matrice (**OA**), Thm : fonctions implicites, Ex :  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , App : régularité d'une racine simple d'un polynôme (**OA**), App : ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  scindés à racines simples est un ouvert de  $\mathbb{R}_n[X]$  (**OA**).

### II - Autres théorèmes de points fixes

#### 1) Points fixes et compacité

↔ **Rombaldi** : Thm : Brouwer en dim 1, C-ex :  $f(x) = x + 1$  sur  $[0, \infty[$ .

↔ **Gourdon** : Thm : Si  $(E, d)$  métrique compact et  $f : E \rightarrow E$  tq  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  alors  $\exists!$  point fixe, C-ex :  $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$  si  $x \geq 0$  et 1 sinon, Prop : point fixe dans un compact convexe pour fcton 1-lipschitzienne.

↔ **Rouvière** : Rq : pas unicité, C-ex : Si  $X = S^1$  et  $f$  une rotation alors  $f$  sans point fixe, Thm : Brouwer [admis], Rq : fonctionne aussi pour toute partie de  $\mathbb{R}^n$  homéomorphe à la boule unité.

#### 2) Points fixes et monotonie

↔ **Rombaldi** : Thm : Si  $f$  croissante de  $I = [a, b]$  dans  $I$  alors  $f$  a au moins un pt fixe, Rq : faux pour  $f$  décroissante avec  $f(x) = 1$  sur  $[0, 1/2]$  et 0 sur  $]1/2, 1]$ , Thm : si  $f$  croissante de  $I$  dans  $I$  étude de  $x_{n+1} = f(x_n)$ , C-ex : si  $f$  pas continue  $(x_n)$  ne converge pas vers un point fixe avec  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et 1 sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ , Thm : si  $f$  croissante de  $I$  dans  $I$  étude de  $x_{n+1} = f(x_n)$  et des suites extraites  $(x_{2n})$  et  $(x_{2n+1})$ , Ex : dans le cas où  $f \circ f$  a plusieurs points fixes.

### III - Résolution approchée de $F(x) = 0$

#### 1) Introduction

↔ **Rouvière** : Explication de la méthode pour se ramener à un pbm de point fixe, Prop : cas attractif/super-attractif/répulsif, Rq : dans le cas répulsif c'est un point fixe pour  $F^{-1}$ , Ex : convergence d'ordre 1 du nombre d'or, Rq : si  $|F'(a)| = 1$  on ne peut rien conclure avec  $\sin(x)$  et  $sh(x)$  (**Demailly**).

#### 2) Méthode de Newton

↔ **Rouvière** : Thm : Méthode de Newton, Ex : estimation de  $\sqrt{y}$ , Ex : convergence quadratique avec le nombre d'or.

---

93.

- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour presque tout)
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle* (pour II)
- Gourdon, *Analyse* (pour II)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour quelques exemples)
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (pour quelques trucs)

94. **Rapport du Jury** : Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses. Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral. Il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Frobenius.

## 207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications. 95 96

Def d'un prolongement

### I - Prolongement et continuité

#### 1) Prolongement ponctuel

↔ Déf : prolongement par continuité, Ex :  $x \sin(\frac{1}{x})$  se prolonge en 0, Ex :  $\exp(-\frac{1}{x^2})$  se prolonge en 0.

#### 2) Prolongement par densité

↔ Thm : principe de prolongement des identités, Thm : prolongement des applications unif continues définies sur une partie dense, App : construction de l'intégrale de Riemann pour des fonctions réglées, App : théorème de Plancherel.

#### 3) Prolongement global

↔ Thm : Tietze-Urysohn, App : si toute fonction continue de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  est bornée, alors  $X$  est compact.

#### 4) Prolongement des formes linéaires

↔ Thm : Hahn-Banach en dimension finie, Cor : sur  $|x|$ , App : critère de densité d'un sev.

### II - Prolongement et différentiabilité

#### 1) Prolongement et régularité

↔ Thm : prolongement pour une fonction continue et non dérivable en un point avec la dérivée qui admet une limite en ce point, C-ex : sans la continuité, Ex :  $\exp(-\frac{1}{x^2})$  de classe  $C^\infty$ , App : existence de fonctions plateaux, Thm de Borel, App : tte fonction  $C^\infty$  sur  $[a, b]$  avec des dérivées de tout ordre à droite en  $a$  et à gauche en  $b$  peut être prolongée en une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 2) Prolongement et équations différentielles

↔ Déf : solution globale + prolongement de solution + solution maximale, Thm de sortie de tout compact, Cor : critère de prolongement, Ex.

### III - Prolongement analytique

#### 1) Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence

↔ Déf : point régulier + singulier, Ex :  $\sum_0^\infty z^n$ , Thm : il y a toujours au moins un point singulier, Thm : 

Abel angulaire et thm taubérien faible
--

.

#### 2) Fonctions holomorphes

↔ Thm des zéros isolés, Thm : principe du prolongement analytique, Ex : Fonction Zeta de Riemann, Ex : 

Prolongement de la fonction Gamma
-----------------------------------

, Thm : 

Densité des polynomes orthogonaux
-----------------------------------

.

---

95.

- Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (pour DVPT 1 et I-1).
- Pommelet, *Agrégation de mathématiques, Cours d'analyse* (Pour I-2-4 & II-1).
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3ème édition (pour Plancherel).
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, 4ème édition (pour I-3, II-2, III-1).
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*, 2ème édition revue et augmentée (pour Hahn-Banach en dim finie & Borel).
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*, 2ème édition (pour III-2, DVPT 2 & DVPT 3).

**96. Rapport du Jury** : Le jury se réjouirait que les candidats abordent la notion de solution maximale pour les équations différentielles ordinaires et maîtrisent le théorème de sortie des compacts. Le théorème de prolongement analytique relève de cette leçon ainsi que le prolongement de fonction  $C^\infty$  sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique, la transformation de Fourier sur  $L^2$  et l'extension des fonctions lipschitziennes définies sur un sous-ensemble (pas nécessairement dense) d'un espace métrique.

# 208 - Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples. <sup>97 98</sup>

Cadre :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## I - Généralités

### 1) Espaces vectoriels normés

↔ Déf : norme, Ex : norme euclidienne, Ex : norme infinie (dans  $\mathbb{R}^n$  ou sur les fct bornées), Rq : norme définit une distance, Prop : norme continue, Déf : normes équivalentes, Rq : 2 normes équivalentes définissent la même topo.

### 2) Continuité des applications linéaires (a.l.)

↔ Thm : équivalences de la continuité d'une a.l., Déf : norme subordonnée, Ex : forme linéaire qui associe la valeur en 0, Ex :  $f \rightarrow \int_0^1 fg$ , Prop :  $\| \|g \circ f\| \| \leq \| \|f\| \| \|g\| \|$ , Déf : dual topo, Prop :  $\text{Ker } f$  hyperplan, Prop : continue linéaire  $\Leftrightarrow \text{Ker } f$  fermé, Ex : précédent non continue, Thm : Hahn-Banach analytique, (Cor prolongement)

### 3) Cas de la dimension finie

↔ Thm : ttes les normes sont équiv, C-ex : sur  $\mathbb{R}[X]$ , Prop : tte a.l. d'un evn de dim finie est continue, C-ex : sur  $\mathbb{R}[X]$  dérivation non continue, Prop : tt sev de dim finie d'un evn est fermé, Prop : parties compactes  $\Leftrightarrow$  fermées bornées, C-ex : boule unité sur  $\mathbb{R}[X]$ , Thm de Riesz.

## II - Espaces de Banach

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ Déf : Banach, Ex : Thm de Riesz-Fisher, Thm :  $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$  est un Banach, Cor :  $E'$  est un Banach, Cor : tte série ACV de  $\mathcal{L}_c(E)$  est CV, Prop : inverse de  $Id - u$ , Prop : tt evn de dim fini est un Banach, Ex :  $\mathcal{C}(0, 1)$  complet pour  $\| \|_\infty$  mais pas pour  $\| \|_1$

### 2) Eléments d'analyse fonctionnelle dans les Banach

↔ Lem : de Baire, App : un evn admettant une base dénombrable n'est pas complet, App : Fonctions continues nulle part dérivables, Thm de Banach-Steinhaus, Cor : classique, App : existence de fonctions continues  $\neq$  de leurs séries de Fourier, (Thm : application ouverte, Cor : classique), Thm : graphe fermé, C-ex :  $\mathbb{1}_{x \geq 0} \frac{1}{x}$  discontinue et graphe fermé.

## III - Espaces de Hilbert

### 1) Généralités

↔ Déf : Hilbert, Ex : dans  $\ell^2(\mathbb{N})$  + dans  $L^2$ , Thm : Cauchy-Schwarz, Identité du parallélogramme, Déf : orthogonal, Rq : l'orthogonal est tjs un sev fermé.

### 2) Applications linéaires dans un espace de Hilbert

↔ Thm : projection sur un ss espace fermé, Thm : de représentation de Riesz, App : déf de l'adjoint, App : thm de Radon-Nikodym faible.

### 3) Bases hilbertiennes

↔ Déf : base hilbertienne, Ex :  $(e^{in})_n$  base hilbertienne de  $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ , Thm : tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable, Thm : caractérisation des bases hilbertiennes, Densité des polynômes orthogonaux.

### 4) (+ Opérateurs compacts)

↔ déf, ...

---

97.

- Gourdon, *Analyse* (pour la majorité du I. et II.)
- Brézis, *Analyse fonctionnelle* (pour II.2.)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour tout le III.)
- Hauchecorne, *Contre-exemples* (pour plusieurs c-ex)
- Xavier Merlin, *Methodix Analyse* (pour 2 exemples, d'autres?)
- Pommelet, *Cours d'analyse : Agrégation de mathématiques* (pour 1 exemple, d'autres?)

**98. Rapport du Jury** : La justification de la compacité de la boule unité en dim finie doit être donnée. Le thm d'équivalence des normes en dim finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dim finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Une telle leçon doit bien-sûr contenir bcp d'illustrations et d'ex. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des ex sans avoir aucune idée de leur étude et à ne pas se lancer dans des dvpts trop sophistiqués. L'analyse des constantes de stabilité pour l'interpolation de Lagrange fournit un ex non trivial peu présenté. Pour des candidats aguerris, la formulation variationnelle de problèmes elliptiques mono-dimensionnels peut donner lieu à des approfondissements intéressants.

## 209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et polynômes trigonométriques. Exemples et applications. 99 100

### I - Approximation des fonctions régulières

#### 1) Approximation point par point

- ↔ **Gourdon An** : Thm : Taylor reste intégrale, Thm : Taylor-Lagrange, Rq : Taylor-Young, Ex : DL de l'exponentielle.
- ↔ **Demailly** : Thm : existence et unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange, Prop : majoration de l'erreur, Rq : l'erreur dépend de l'oscillation de la fct et de la répartition des pts où on interpole, Ex : dessin pour  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$  pour pts équidistants et pts de Tchebychev.

#### 2) Approximation uniforme sur un compact

- ↔ **Hirsh-Lacombe** : Déf : partie séparante, Thm : Stone-Weierstrass réel, Ex : les fonctions lipschitziennes vérifient le théorème.
- ↔ **Z-Q** : App : Weierstrass par les polynômes de Bernstein, App : si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et vérifie  $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$  pour tout  $n$  alors  $f = 0$  (**Gourdon An**).
- ↔ **Demailly** : Existence et unicité du polynôme de meilleure approximation de  $f$  à l'ordre  $n$ , Rq : sur  $\mathbb{R}$  la limite uniforme de polynômes est un polynôme (**Gourdon An**).

### II - Approximation en moyenne quadratique

- 1) ↔ **OA** : Déf : fonction poids, Prop :  $L^2(I, \rho)$  est un espace de Hilbert pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho \Rightarrow$  existence et unicité des polynômes orthogonaux par Gram-Schmidt, Ex : polynômes de Hermite et de Legendre, App : meilleure approximation avec l'expression du projeté en fonction des polynômes orthogonaux, Thm : densité des polynômes orthogonaux, C-ex.

### III - Approximation des fonctions périodiques

#### 1) Définitions et premières propriétés

- ↔ **Gourdon An** : Déf : polynôme trigo + coeff de Fourier + série de Fourier, Thm : Riemann-Lebesgue.

#### 2) Convergence au sens de Cesaro

- ↔ **OA** : Déf : somme de Cesaro de  $S_n$   $\sigma_N(f)$  + noyaux de Dirichlet  $D_N(f)$  et de Fejer  $K_N(f)$ , Prop :  $S_N(f) = f * D_N$  et  $\sigma_N(f) = f * K_N$ , Thm : de Fejer, App : densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues  $2\pi$  périodiques et dans  $L^p(\mathbb{T})$ , App : Critère de Weyl (**FGN An2**).

#### 3) Convergence $L^2$

- ↔ **Gourdon An** : Prop :  $S_n(f)$  est égale au projeté de  $f$  sur  $\text{Vect}(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  et  $\|f - S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 - \sum_{-n}^n |c_n(f)|^2$ , Thm : Parseval, Rq : CV  $L^2$  de la série de Fourier de  $f$  vers  $f$ , Rq : si  $f$  est continue et que sa série de Fourier CV dans  $L^2$  alors c'est vers  $f$ , App :  $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

#### 4) Convergence ponctuelle et uniforme

- ↔ **Gourdon An** : Thm : CV simple de Dirichlet, Thm : CV normale de la série de Fourier, App : équation de la chaleur (**FGN An4**).

99.

- Gourdon, *Analyse* (pour I-2 & III-1-3-4)
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (pour I)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (pour II et III-2 + densité poly orthogonaux)
- Hirsh, Lacombe, *Analyse fonctionnelle* (pour Stone-Weierstrass)
- Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour Weierstrass par les poly de Bernstein)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Analyse 2 et 4* (pour des exemples)

100. **Rapport du Jury** : Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme le théorème de Stone-Weierstrass. Comme la leçon 202, elle permet aux candidats plus ambitieux d'aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier.



# 213 - Espace de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications. 101 102

Cadre :  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

## I - Généralités sur les espaces de Hilbert

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Hirsch-Lacombe** : Déf : produit scalaire et espace préhilbertien, Rq : formule  $(x+y|x+y)$ , Ex :  $\mathbb{C}^d$  et  $\mathbb{C}_a^{\mathbb{K}}$ , Prop : Inégalité de Schwarz, Cor : définition norme, Ex :  $L^2(m)$  et  $l^2(I)$ , Prop : identité du parallélogramme (dessin), Prop :  $(E, \|\cdot\|)$  préhilbertien  $\Leftrightarrow$  il vérifie l'identité du parallélogramme, Déf : élt orthogonaux et orthogonal, Prop : Pythagore, Rq : réciproque vraie si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , C-ex avec  $\mathbb{C}$ , Déf : espace de Hilbert, Ex : espace préhilbertien de dim finie  $L^2(m)$ , App : Thm de Grothendieck (**Un max de math**), **Dorénavant E est un Hilbert.**

### 2) Projection sur un convexe fermé

↔ **Hirsch-Lacombe** : Thm : projection sur un convexe fermé (dessin), Prop :  $P_C$  est 1-lipschitzienne, Prop :  $F$  sev de  $E$   $P_F$  opérateur linéaire de  $E$  sur  $F$   $P_F(x)$  unique  $y \in F$  tq  $y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$ , App : espérance conditionnelle (**Barbe-Ledoux**), Cor :  $E = \overline{F} \oplus F^\perp$ , C-ex :  $E = l^2(\mathbb{N})$  et  $F = \{ \text{suites nulles à partir d'un certain rang} \}$ , Cor :  $F$  sev de  $E$  alors  $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ .

### 3) Dualité

↔ **Hirsch-Lacombe** : Thm de représentation de Riesz, App : déf de l'adjoint, Ex : opérateur à noyau.

↔ **Brezis** : Thm Stampacchia, Cor : Lax-Milgram, App : résolution équation )

## II - Bases hilbertiennes

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **OA** : Déf : base hilbertienne, Rq : on peut orthonormaliser avec Gram-Schmidt, Ex :  $L^2(\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$  et  $l^2(\mathbb{N})$ , Thm : tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

↔ **Hirsch-Lacombe** : Prop : projection sur un ev engendré par une famille orthonormale finie, Prop :  $(e_i)_{i \in I}$ ,  $\sum | \langle x | e_i \rangle |^2 \leq \|x\|^2$ , Thm : Bessel-Parseval, Ex : calculer  $\inf_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx$  (**FGN A13**).

### 2) Polynômes orthogonaux

↔ **OA** : Def : fonction poids,  $L^2(I, \rho)$ , Densité des polynômes orthogonaux, Ex : polynômes de Hermite et de Legendre, C-ex.

↔ **Demailly** : Méthode de quadrature de Gauss.

## III - Séries de Fourier

1) ↔ **Gourdon ou OA (pour l'aspect hilbertien)** : Déf : coeff de Fourier, Thm : égalité de Parseval, Ex : calcul de  $\sum \frac{1}{n^4}$ , Prop : Riemann-Lebesgue  $c_n(f) \rightarrow 0$ , Prop : cv de la série de Fourier si  $f \in C^1$  par morceaux, C-ex : fcts continues différentes de leur série de Fourier, Thm : cv normale si  $f$  continue et  $C^1$  par morceaux, Ex : calcul de  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

101.

- Hirsch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle* (pour I & II-1)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (pour II)
- Gourdon, *Analyse* (pour III)
- Brezis, *Analyse fonctionnelle* (Stampacchia)
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (1 application)
- Barbe-Ledoux, *Probabilité* (1 application)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (1 exemple)
- Zavidovique, *Un max de maths* (Grothendieck)

102. **Rapport du Jury** : Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus la formule de projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne et illustrer la leçon par des exemples...

## 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications. 103 104

Cadre :  $n, p \in \mathbb{N}$ .  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  $V$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .  $a \in U$ .  $f$  application  $U \rightarrow \mathbb{R}^p$ .  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Motivations : Deux thm d'existence qui ont une nature locale. Utiles en géo diff.

**Rouvière** : Déf :  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme.

### I - Théorème d'inversion locale

#### 1) Enoncés

↔ **Rouvière** : Thm d'inversion locale (TIL) + dessin, Ex :  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  difféo local au vois de tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , C-ex :  $f(x) = \mathbb{1}_{x \neq 0}(x + x^2 \sin \frac{\pi}{x})$  jms injective donc pas de TIL, Thm d'inversion global (TIG), Ex : précédent non difféo global, Ex : chgt en polaire  $\mathcal{C}^1$  difféo, TIG version holo.

#### 2) Applications

↔ (**Rouvière** : Thm : Hadamard-Lévy) + cas particulier)

↔ **Mnéinné-Testard** : Si une matrice est suffisamment proche de l'identité c'est une racine  $k$ -ième d'une autre (OA), Thm : exp est  $\mathcal{C}^1$  et sa diff en 0 est  $Id$  donc exp est un difféo local, App : Surjectivité de l'exponentielle, App :  $GL_n(\mathbb{K})$  n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.

↔ **Rouvière** ou **Lafontaine** : Prop/Déf : submersion + à difféo local près il n'y en a qu'une, Prop/Déf : immersion + à difféo local près il n'y en a qu'une + dessin, (Thm du rang constant).

↔ **Rouvière** : Lemme + Lemme de Morse, App : sous les mêmes conditions mais avec  $D^2f(0)$  définie positive 0 min local strict de  $f$  (OA), App :  $f(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$  a un pt double à l'origine.

### II - Théorème des fonctions implicites

#### 1) Enoncés

↔ **Rouvière** : Thm des fonctions implicites (TFI) + dessin, Ex :  $x^2 + y^2 = 1$  2 fct implicites demi-cercles supérieur et inférieur, Cor : expression des dérivées partielles de la fct implicite, Ex : appliqué à l'ex précédent, Rq : TFI ↔ TIL.

#### 2) Applications

↔ **Gourdon** : Extrémas Liés, App : inégalité arithmético-géométrique, App : diagonalisation des endo sym (OA), App : inégalité de Hadamard (**Rouvière**).

↔ **OA** : App : une racine d'un poly dépend de celui-ci de manière  $\mathcal{C}^\infty$ , App : l'ensemble des poly scindés simples de  $\mathbb{R}_n[X]$  est ouvert.

### III - Mise en situation : les sous-variétés

**Dans toute la suite, on se place dans  $\mathbb{R}^n$ .  $V$  sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .**

#### 1) Définitions et théorème central

↔ **Rouvière** : Déf : sous-variété de dimension  $d$  + dessin, Ex : le cône épointé, C-ex : un  $V$  n'est pas une sous-variété, Thm des sous-variétés (équivalence des déf), Rq : le TFI et le TIL donnent certaines implications, Ex :  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 2) Espaces tangents

↔ **Rouvière** : Déf : vecteurs tangents, Thm : l'ensemble des vecteurs tangents en un point est un sev de dim celle de la sous-variété, Prop : l'espace tangent à un point pour chacune des déf, App : interprétation géométrique du thm des extrémas liés (OA).

#### 3) Exemples de sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

↔ **Rouvière** : Prop :  $SL_n(\mathbb{R})$  sous-variété de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dim  $n^2 - 1$  + l'espace tangent en un point, Prop :  $O_n(\mathbb{R})$  sous-variété de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dim  $\frac{n(n-1)}{2}$  + l'espace tangent en un point, ( $GL_n(\mathbb{R})$  sous-variété **Mneinné-Testard**).

103.

- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour presque tout)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour pas mal d'applications)
- Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles* (pour immersion / submersion : mieux écrit)
- Gourdon, *Analyse* (pour extrémas liés + son app)
- Mneinné-Testard, *Groupes de Lie classiques* (pour exp + si on veut rajouter  $GL_n$  sous variété)

104. **Rapport du Jury** : Il s'agit d'une belle leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

# 215 - Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications. 105 106

Cadre :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $V$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

## I - Généralités

### 1) Différentielles

↔ **Rouvière** : Déf : différentiable, Prop : la diff est unique et notation  $Df(a)$ , Ex : fct réelle, Ex : fct cste + linéaire + quadratique, Déf :  $C^1$  et difféomorphisme, Ex : diff de  $M \mapsto M^{-1}$ , Propriétés de la diff :  $f$  diff en  $a$  alors  $f$  continue en  $a$  /  $f+g$  /  $\lambda f$  /  $g \circ f$ , App : diff de  $f^{-1}$ , Déf : gradient.

### 2) Dérivées partielles

↔ **Gourdon** : Déf : dérivable selon un vecteur, Prop :  $f$  diff en  $a$  alors  $f$  dér en  $a$  selon tt vecteur, Déf : dérivée partielle, C-ex :  $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$  dér en 0 selon tout vecteur mais non différentiable, Rq : formule du grad avec les dérivées partielles, Thm : formule de  $Df(a)(h)$  avec les dérivées partielles, Ex : différentielle du déterminant, Rq : si thm vrai pour tout  $a$  alors  $f$  est  $C^1$ , C-ex :  $x^2 \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$  et 0 si  $x = 0$ , Déf : matrice jacobienne et jacobien, App : calcul d'intégrales, Prop : dérivée partielle de  $f \circ \phi$ , Ex : dér de  $u(x) = f(x, -x)$  et dérivée partielle de  $g(x, y) = f(y, x)$  (**Rouvière**), App : calcul du laplacien en coordonnées polaires.

### 3) (+ Plan tangent à une surface (si on est chaud...))

↔ **Rouvière** : Equation du plan tangent à une surface définie implicitement.

### 4) Accroissements finis

↔ **Rouvière** : Thm des accroissements finis, Thm : si  $U$  convexe et  $f$  vérifie le TAF alors  $f$  lipschitzienne + si  $U$  connexe et  $Df(x) = 0$  alors  $f$  cste, App : nbre de solution d'un système d'équations, App : convergence d'une suite d'applis différentiables.

## II - Théorème d'inversion

1) ↔ **Rouvière** : Thm d'inversion locale, App : surj de l'exponentielle (**Max de maths**), App : si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est suffisamment proche de Id alors  $A$  est une racine  $k$ -ième (**OA**), Thm d'inversion globale, Appli Hadamard Lévy (**Gourdon**), Thm des fonctions implicites, ex sur  $x^2 + y^2 - 1$ .

## III - Différentielles d'ordre supérieur

### 1) Définitions

↔ **Rouvière** : Déf : 2 fois différentiables, Prop :  $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$  s'identifie à  $\mathcal{L}(E \times E, F)$ , Thm : de Schwarz, C-ex : avec  $g(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) / (x_1^2 + x_2^2)$ , Déf : de la diff d'ordre  $k$ , Notation :  $D^k f(a)$ , Déf :  $C^k$ .

### 2) Formules de Taylor

↔ **Rouvière** : Taylor avec reste intégral, Lemme de Morse

## IV - Problème d'extremums

1) ↔ **Rouvière** : Thm : conditions nécessaire pour avoir un min/max et condition suffisante pour avoir un min/max strict, C-ex :  $f(x) = x$  sur  $[0, 1]$  thm des extrema liés (**Gourdon**), App : inégalité arithmético-géométrique, interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange, App : diagonalisation des endo symétriques (**OA**).

105.

- Rouvière, *Petit Guide de Calcul Différentiel* (pour quasi tout)
- Gourdon, *Analyse* (pour I-2 et extrema liés et lemme d'Hadamard)
- Beck, Peyré, *Objectif agrégation* (pour 2 appli)
- Zavidovique, *Un Max de maths* (pour surjectivité de l'exponentielle)

**106. Rapport du Jury** : Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivés partielles. Le théorème de différentiation composée doit être connu et pouvoir être appliqué dans des cas simples comme le calcul de la différentielle de l'application  $x \mapsto \|x\|^2$  pour la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe  $C^2$  ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux.

## 217 - Sous variétés de $\mathbb{R}^n$ . Exemples 107 108

### I - Définitions équivalentes, premiers exemples

#### 1) Définition et premiers exemples

↔ **Rouvière** : Déf : lisse et sous variété, Rq : si  $V$  est lisse en  $a$  elle l'est aussi en tout point voisin et si  $\varphi$  est un difféomorphisme  $V$  est lisse en  $a \Leftrightarrow \varphi(V)$  l'est en  $\varphi(a)$ , Ex : le cône lisse en chacun de ses pts sauf origine, C-ex :  $y = |x|$  n'est pas lisse en 0.

#### 2) Définitions équivalentes

↔ **Lafontaine** : Thm d'inversion locale (TIL), Thm des fonctions implicites (TFI) (**Rouvière**), Déf : immersion/-submersion, Thm : déf équivalentes, Rq : (ii)  $\Rightarrow$  (iv) résulte du TFI et (iii)  $\Rightarrow$  (iv) résulte du TIL (**Rouvière**), Ex : la sphère et le tore, C-ex : une intersection de sous variété pas forcément une sous variété (**Rouvière**), Ex : on peut avoir plusieurs représentations pour une même sous variété (cercle).

### II - Espace tangent

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Rouvière et Lafontaine** : Déf : vecteur tangent, Ex : sur  $t \mapsto (t^2, t^3)$  en 0, Prop : les vecteurs tangents en un point forment un sev, Déf : espace tangent, Prop :  $T_a M$  suivant les déf implicite / param ou graphe.

#### 2) Applications en analyse

↔ Thm : Extrema liés (**Gourdon**), Interprétation des multiplicateurs de Lagrange (**OA**), Lemme de Morse (**Rouvière**).

### III - Exemples

#### 1) Le groupe des matrices

↔ **H2G2** : Thm :  $GL_n$  est une sous-variété de  $M_n$  et espace tangent en  $I_n$ , Thm :  $O_n$  est une sous variété et espace tangent en l'identité, Thm :  $SL_n$  est une sous variété et espace tangent en  $I_n$ .

#### 2) Surface de $R^3$

↔ **Rouvière** : Un exemple.

---

107.

- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel* (pour quasi tout)
- Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles* (pour quasi tout)
- Beck, *Objectif Agrégation* (interprétation des multiplicateurs de Lagrange)
- Gourdon, *Analyse* (pour extrema liés)
- Caldero Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et géométries* (pour application aux matrices)

108. **Rapport du Jury** : Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, etc.) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. Le théorème des extrema liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

## 218 - Applications des formules de Taylor. 109 110

Cadre :  $E$  un  $\mathbb{R}$ -evn,  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

### I - Généralités

#### 1) Formules de Taylor sur $\mathbb{R}$

↔ Thm : TAF, Thm : égalité de Taylor-Lagrange, Rq : pour  $n = 0$  on retrouve le TAF + formule en 0 lorsque  $0 \in I$ , App :  $x - x^2/2 \leq \log(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3$ , Notation : reste  $R_n$ , Cor : fct polynômiale  $\Leftrightarrow$  reste nul à partir d'un certain rang, Thm : inégalité Taylor-Lagrange, Thm : Taylor-Young, App : thm de Darboux, Thm : Taylor avec reste intégral, Rq : pour  $n = 0$  on retrouve le thm fondamental de l'analyse, App : vp  $(\frac{1}{x})$  est une distribution d'ordre 1 (appli de ouf!)

#### 2) Formules de Taylor sur $\mathbb{R}^d$

↔ Déf : différentielle en  $a$ , Thm : Taylor-Young généralisé, Ex, Rq : on peut généraliser les autres formules de Taylor sur  $\mathbb{R}^d$ .

### II - Applications en analyse et probabilités

#### 1) Développements limités

↔ Déf : DL, Prop : unicité du DL, Prop : égalité des 2 premiers coef du DL avec  $f(0)$  et  $f'(0)$ , Rq : existence d'un DL d'ordre  $\geq 2$  n'assure pas l'existence de  $f''(0)$ , Ex, Prop : si  $f$   $n$  fois dérivable en 0 Taylor-Young = DL, App.

#### 2) Développements en série entière

↔ Prop :  $f$  DSE sur un vois de 0  $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0$  tq  $R_n(x) \rightarrow 0$  sur  $] -\alpha, \alpha[$ , Thm : Bernstein sur les séries entières, Ex, C-ex :  $f(x) = e^{-1/x^2}$  si  $x > 0$  et  $f(x) = 0$  sinon.

#### 3) Probabilités

↔ **Ouvrard 2** : Lem : si va  $L^2$  alors sa fct caractéristique admet un DL d'ordre 2 en 0, TCL, App : intervalle de confiance, Thm : Poisson + événements rares, Rq : ce que ça représente.

#### 4) (+ Formule d'Euler-Maclaurin)

↔ Déf : nombres de Bernouilli + polynômes de Bernouilli, Thm : Euler-Maclaurin, App : dvpt asymptotique de la série harmonique.

### III - Applications en analyse numérique

#### 1) Méthode de Newton

↔ Méthode de Newton, Ex :  $f(x) = x^2 - y$  on obtient une valeur approchée de  $\sqrt{y}$  assez rapidement.

#### 2) Approximations d'intégrales

↔ Subdivision, Erreur, Déf : méthode d'ordre  $N$  si exacte pour les polynômes de degré  $\leq N$ , Thm/Déf : Noyau de Peano, Tableau comparaison méthodes (rectangles, point milieu, trapèzes, simpson).

### IV - Applications en géométrie

#### 1) Etude d'extrêmes

↔ Prop :  $f$  admet un extremum relatif en  $a \Rightarrow df(a) = 0$ , Thm : caractérisation d'un min (resp. max) relatif en fonction de  $d^2f(a)$  (matrice d'une fq), App :  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

#### 2) Courbes et surfaces

↔ Etude affine locale d'une courbe : pt d'inflexion/ordinaire/de rebroussement de 1ère espèce/de rebroussement de 2ème espèce, Lemme de Morse

---

109.

- Xavier Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (I, II-1-2, IV-1).
- Beck, *Objectif Agrégation*, 2ème édition (Formule de T-Y sur  $\mathbb{R}^d$ , exemples, c-exemples).
- François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (IV-2, DVPT 1, DVPT 2).
- Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (III-2).
- Ouvrard, *Probabilités 2* (pour II-3)

**110. Rapport du Jury** : Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations  $o$  et  $O$  qu'ils utilisent. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (TCL). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités  $\|f^{(k)}\| \leq 2^{k(n-k)/2} \|f\|^{1-k/n} \|f^{(n)}\|^{k/n}$  (lorsque  $f$  et sa dérivée  $n$ -ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

## 219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et Applications. <sup>111 112</sup>

Cadre :  $E$  un  $\mathbb{R}$ -evn de dimension finie,  $C$  une partie de  $E$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in C$ .

Déf max local, global, strict, notation max/min= extremum.

### I - Existence et unicité

#### 1) Compacité

$\leftrightarrow$  Prop : fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, App : thm du point fixe, Cor : distance a un sev fermé, Ex : approx par des poly, Prop :  $f$  coercive alors  $f$  minorée et atteint son min, App : d'Alembert-Gauss.

#### 2) Convexité

$\leftrightarrow$  Déf : fct convexe, Thm : ensemble des min d'une fct convexe est un convexe, Lem : unicité du min, App : inégalité arithmético-géométrique + Hölder + Minkowski.

#### 3) Un exemple utilisant la compacité et la convexité

$\leftrightarrow$  Lem : convexité log du det, Ellipsoïde de John Loewner

#### 4) Espace Hilbertien

$\leftrightarrow$  Thm : proj sur un convexe fermé, Thm : cas des sev fermé, Thm : Lax-Milgram.

#### 5) (+ Analyse complexe)

$\leftrightarrow$  Déf : propriété de la moyenne, Thm : principe du maximum (local et global), C-ex : n'empêche pas l'existence de  $\min f(z) = z$ , Thm : Liouville, Thm : si  $f$  holo et si  $|f|$  admet un min alors il est nul.

### II - Localisation et calcul différentiel

#### 1) Conditions du premier ordre

$\leftrightarrow$  Déf : point critique, Thm : si extremum en  $a$  alors  $f'(a) = 0$ , C-ex :  $x^3$ , Thm : Rolle, Thm : Fermat dans OA, Thm : si  $f$  convexe a un min local en  $a$  alors ce min est global, Prop : si  $f$  convexe diff en  $a$  et  $Df(a) = 0$  alors  $f$  a un min global en  $a$ .

#### 2) Condition du second ordre

$\leftrightarrow$  Thm :  $f \in C^2$  si  $f$  a un min loc en  $a$  alors  $a$  point critique de  $f$  et  $D^2f(a)$  est une forme bilinéaire sym pos, Thm : récip si  $a$  point critique et  $D^2f(a)$  est définie pos alors  $a$  min local strict de  $f$ , Thm : Monge, Ex : étude de  $x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ , Rq : si  $D^2f(a)$  pas définie positive on étudie les ordres supérieurs, Cas particulier lorsque  $f$  est convexe.

#### 3) Optimisation sous contrainte

$\leftrightarrow$  thm des extrema liés, App :  $SO_n(\mathbb{R})$  par rapport a  $SL_n(\mathbb{R})$ .

### III - Optimisation numérique

#### 1) Méthode de Newton

$\leftrightarrow$  Méthode de Newton.

#### 2) Méthode du gradient à pas optimal

$\leftrightarrow$  Inégalité de Kantorovitch, Gradient à pas optimal

---

111.

- Xavier Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (thm point fixe, Rolle, Monge en partie, II.3, ).
- Beck, *Objectif Agrégation*, 2ème édition (I.2, I.4, I.5).
- François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (intro, Fermat, dernier thm II.1, III.1 ).
- Pommellet, *Cours d'analyse* (I.1, Inégalités, II.1, II.2, Liouville).
- Hiriart-Urruty, *Fonctions convexes et optimisation numérique (ou un truc comme ça)* (III.2).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3* (John-Loewner et le lemme).

**112. Rapport du Jury** : leçon a changé de titre. Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon. L'étude des algorithmes de recherche d'extremas y a maintenant toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, etc. Le cas particulier des fonctionnelles sur  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $1/2(Ax|x) - (b|x)$ , où  $A$  est une matrice symétrique définie positive, devrait être totalement maîtrisé. Les candidats devraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés et les équations normales qui y sont attachés. Enfin les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et , là encore des algorithmes peuvent être présentés et analysés.

## 220 - Equations différentielles $X' = f(t, X)$ . Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2. <sup>113 114</sup>

### I - Théorie des équations différentielles

#### 1) Existence et unicité des solutions

↔ **Demailly** :  $y' = f(t, y)$  (E) avec  $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$  continue, Déf : solution (locale) de (E), Déf : problème de Cauchy, Déf : prolongement d'une solution, Déf : solution maximale, Thm : tte sol se prolonge en une solution maximale, Ex : (1)  $y' = y^2$ , Déf : solution globale, Ex :  $y = 0$  est sol globale de (1), Lemme : équivalence entre équation intégrale et pb de Cauchy.

↔ **ZQ** : Thm : Cauchy-Lipschitz local, Ex :  $y' = y^2$  avec  $y(0) = y_0 > 0$ , C-ex :  $y' = 3|y|^{2/3}$  avec  $y(0) = 0$  (**Demailly**), Thm de Cauchy Lipschitz global et appli (**Rouvière**), Thm : Cauchy Peano.

#### 2) Outils pour l'étude des solutions

↔ **Rouvière** : Lemme de Gronwall, Appli qui suit, Rq : l'appli nous redonne l'unicité dans C-L global, Thm : majoration a priori et Ex (**ZQ**), Cas linéaire : Déf : wronskien noté  $W$ , Prop : équa diff vérifiée par le  $W$  et solution, Rq :  $W$  est soit nul soit de signe constant, App : thm d'entrelacement de Sturm (**FGN An 4**), App : Equation de Hill Mathieu

### II - Stabilité des systèmes différentiels autonomes

#### 1) Définitions

↔ **ZQ** : Déf : système autonome, Déf : point d'équilibre, Déf : stable/instable et asymptotiquement stable, dessin (**Demailly**).

#### 2) Cas linéaire

↔ **Demailly** :  $Y' = AY$ , Thm : conditions de stabilité via les vp de  $A$ , En dimension 2 : portraits de phases suivant les vp  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , Ex :  $x'' + x = 0$  (**FGN An 4**, Van der Pol cas  $\varepsilon = 0$ ).

#### 3) Cas général

↔ **Rouvière** : Déf : système linéarisé, Thm : Liapounov, Ex : cas ou  $Df(0) = 0$  :  $x' = \alpha x^3$   $y' = \beta y^3$  on ne peut pas conclure avec Liapounov  $\Rightarrow$  résolution à la main (**Demailly**), Prop : si  $Df(0)$  non dégénérée (**Demailly**), Ex : Van der pol cas  $\varepsilon < 0$  (**FGN An 4**).

### III - Exemples d'études qualitatives

#### 1) Equations particulières

↔ **Demailly** : Bernoulli, Ricatti, équations homogènes.

#### 2) Utilisation des séries entières

↔ **MéthodiX** : Méthode, Equation de Bessel (**FGN An 4**).

#### 3) Etude du système Lotka-Volterra

↔ **FGN An 4** : Système, Thm : unique solution maximale qui est en fait globale et les solutions sont périodiques.

#### 4) Etude du pendule simple

↔ **FGN An 4** : Système, Détails des différents cas suivant la valeur de  $\alpha$ .

---

113.

- Demailly, *Analyse numérique et équation différentielles* (pour beaucoup)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour Cauchy lipschitz global, wronskien, Gronwall et Liapounov)
- Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* (pour pas mal de choses)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 4* (pour pleins d'exemples)
- Merlin, *MéthodiX Analyse* (pour III-2)

114. **Rapport du Jury** : C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. La notion même de solution maximale est trop souvent mal comprise. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur les variables de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sorties de tout compact sont nécessaires. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en oeuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées. Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase. Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problématiques d'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que le candidat est une maîtrise convenable de ces questions.



## 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications. 115 116

### I - Généralités

#### 1) Existence et unicité

↔ **Gourdon** : Déf : équa diff linéaire (EDL) d'ordre  $p$ , Rq : écriture matricielle, Ex :  $y'' + 2y' + y = te^t$ , Thm : Cauchy-Lipschitz linéaire, Rq : théorème pour les systèmes d'ordre  $p$ , C-ex : non unicité (**Demailly**), Écriture intégrale de l'équa diff (**Pommellet**).

#### 2) Structure de l'espace des solutions

↔ **Gourdon** : Thm : solutions de l'EDL homogène est un sev de dim  $n$ , Rq : solutions de l'EDL sous-espace affine de dim  $n$ , Rq : solutions d'une EDL homogène d'ordre  $p$  est un sev de dim  $np$ .

↔ **Pommellet** : Principe de superposition.

↔ **Gourdon** : Déf : wronskien  $W(t)$ , Rq : wronskien pour EDL homogène d'ordre 2, Prop : Le rang de  $(V_1(t), \dots, V_n(t))$  avec les  $V_i$  solutions de EDL homogène est indépendant de  $t$ , Prop :  $W(t) = W(a) \exp(\int_a^t \text{tr}(A(u)) du)$ , Cor :  $(V_1, \dots, V_n)$  base de solution de EDL homogène  $\Leftrightarrow \exists t_0$  tq  $W(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$ .

↔ **FGN** : Thm d'entrelacement de Sturm.

### II - Résolution explicite

#### 1) Cas des coefficients constants

↔ **Demailly** : Solution du système homogène  $\frac{dY}{dt} = AY$ , Thm :  $Y = e^{(t-t_0)A} Y_0$ .

↔ **Gourdon** : Ex :  $\{x' = x + z, y' = -y - z, z' = 2y + z\}$ , App : Si  $A$  et  $B$  commutent,  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$  (**Pommellet**), Méthode : base de solution de la forme  $x \mapsto P_i(x) \exp(\lambda_i t)$ , Ex :  $y'' + 2y' + y = 0$ , Solutions du système avec second membre : sol système homogène + solution particulière, Méthode de la variation des constantes (**Demailly**), Ex :  $y'' + y = \tan^2(t)$  sur  $] -\pi/2; \pi/2[$ , App :  $(f \in C^1([0, \infty[, \mathbb{C})$  tq  $f + f' \rightarrow 0$  en  $+\infty$ )  $\Rightarrow (f \rightarrow 0$  en  $+\infty)$  (**Pommellet**)

#### 2) Cas des coefficients variables

↔ **Gourdon** : Rq : variation des constantes toujours vraie, Ex :  $t^2 y'' - 2y' = 3t^2$ , Prop : cas particulier des EDL d'ordre 1 sur  $\mathbb{K}$ , Ex :  $(1 + t^2)y' = ty + (1 + t^2)$ .

↔ **Pommellet** : Méthode de Liouville, Ex :  $(x + 1)y'' - y' - xy = 0$ .

↔ **Methodix** : Résolution grâce aux séries entières, Ex : Equation de Bessel (**FGN**).

### III - Étude qualitative

#### 1) Étude de stabilité

↔ **Demailly** : Déf : solution stable, solution asymptotiquement stable, condition sur les valeurs propres.

↔ **Rouvière** : Thm de Liapounov

#### 2) Étude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

↔ **Demailly** : Étude de  $\frac{dX}{dt} = AX$  dans  $\mathbb{R}^2$ , Allure de toutes les trajectoires en fonction des valeurs propres de  $A$ .

---

115.

- Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (un peu partout)
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (non-unicité, un peu II.1 et II.2, III.1 et III.2)
- Pommellet, *Cours d'analyse* (pour ex et applis)
- Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS analyse 4 (pour Sturm, Bessel)
- Xavier Merlin, *MethodiX Analyse* (résolution avec séries entières)
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel* (pour Liapounov)

**116. Rapport du Jury** : On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie bien-sûr). Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devrait être exploitées.

## 222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires. 117 118

### I - Généralités

#### 1) Définitions

↔ **David-Gosselet** : Déf : équation aux dérivées partielles linéaire (EDPL) d'ordre 1/2 et homogène, Ex :  $\partial_t u + v\partial_x u = 0$ , Déf : pb aux frontières, Ex : équation de la chaleur avec  $u(x_0, t) = u_0(t)$ , Déf : pb de Cauchy, Ex :  $y\partial_x f - x\partial_y f = 0$  avec  $f(s, 0) = \widehat{f}(s)$ , Ex : équation des ondes, Déf : pb bien posé au sens de Hadamard.

#### 2) EDPL d'ordre 1

↔ **ABF** : Rappel du pb d'ordre 1, Prop :  $\exists!$  courbe solution de  $X'(t) = A(t, X(t))$  avec  $X(t_0) = y_0$ , Déf : courbe caractéristique issue de  $(t_0, y_0)$ , Prop :  $\exists!$  solution au pb de Cauchy d'ordre 1, Ex :  $\partial_t u + 2t\partial_x u = 0$  avec  $u(0, x) = h(x)$ , Thm :  $\exists!$  solution au pb de Cauchy avec second membre.

#### 3) Classification des EDPL d'ordre 2

↔ **David-Gosselet** : Déf : elliptique + parabolique + hyperbolique, Ex : équation des ondes est hyperbolique + équation de diffusion est parabolique + équation de Laplace est elliptique, Rq : Le caractère elliptique / parabolique ou hyperbolique d'une EDPL n'est pas modifié par chgt de variable.

### II - Exemple d'EDPL hyperbolique

#### 1) Préliminaire : équation de transport

↔ **David-Gosselet** : Rappel de l'équation de transport, Résolution dans le cas  $c = cste$  et dans le cas  $c(x) = x$ .

#### 2) Équation des ondes

↔ **David-Gosselet** : Déf : équation des ondes, Thm : solution de l'équation, Rq : 2 classes de solutions se propageant à vitesse  $+c$  ou  $-c$ .

### III - Un exemple d'EDPL elliptique

1) ↔ **Amar-Matheron** : On souhaite résoudre  $\Delta u = 0$ , Déf : fonction harmonique, Ex :  $\log(\sqrt{x^2 + y^2})$ , Coro : Si  $f$  est holomorphe alors  $\Re(f)$  est harmonique.

↔ **FGN ana4** : Déf : propriété de la moyenne, Thm :  $f$  harmonique  $\Leftrightarrow$  vérifie la propriété de la moyenne, Thm : Sous certaines conditions,  $\exists!$  solution à  $\Delta u = 0$ .

### IV - Exemples d'EDPL paraboliques

#### 1) Équation de la chaleur

↔ **FGN Ana4** : Thm : résolution de l'équation de la chaleur sur un anneau, Thm : Si  $u_0$  non constante alors il n'existe pas de solution bornée.

↔ **David-Gosselet** : Prop : propagation à vitesse infinie, non-réversibilité, régularisation de la solution au cours du temps.

#### 2) Équation de Schrödinger

↔ **FGN Ana4** : Thm : solution de l'équation de Schrödinger.

---

117.

- David et Gosselet, *Équations aux dérivées partielles* (pour presque tout)
- Ababou-Boumaaz et Francheteau, *Problèmes classiques en théorie des équations aux dérivées partielles* (pour I-2)
- Amar, Matheron, *Analyse complexe* (pour III)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ens, Analyse 4* (pour III & IV)

118. **Rapport du Jury** : Cette nouvelle leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter  $\lambda u - u''$  avec des conditions de Dirichlet en  $x = 0$ ,  $x = 1$  ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques. Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur, de Schrödinger ou des ondes dans le contexte des fonctions périodiques. La transformée de Fourier permet ceci dans le cadre des fonctions sur  $\mathbb{R}^d$ . Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies. Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev  $H_0^1([0, 1])$ , jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec l'étude de solutions élémentaires d'équations elliptiques.

## 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications. 119 120

Déf : suite numérique

### I - Suites numériques et convergence

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Amrani** : Déf : suite CV, Rq : suite divergente si non CV, Thm : unicité de la limite, Ex :  $u_n = 1 + (-1)^n/n$  et  $u_n = n$ , Prop : CV  $\Rightarrow$  bornée, C-ex :  $(-1)^n$ , Prop : monotone bornée  $\Rightarrow$  CV, Thm des gendarmes, Ex :  $\sin(n)/n$ , Déf : suites négligeables et équivalentes.

#### 2) Suites adjacentes

↔ **Amrani** : Déf : suites adjacentes, Thm : suites adjacentes  $\Rightarrow$  CV de même limite, Ex :  $u_n = 1 - 1/n$  et  $v_n = 1 + 1/n^2$ .

↔ **Gourdon** : Ex :  $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$  et  $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$  sont adjacentes, App : Critère des séries alternées, App : segments emboîtés.

#### 3) Valeur d'adhérence

↔ **Amrani** : Déf : suites extraites, Ex :  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , Prop : Si  $(u_n)$  converge vers  $l$  alors tte suite extraite aussi, Déf : valeur d'adhérence, Ex :  $u_n = \sin(n)$ , Prop : Une suite CV n'a que sa limite pour valeur d'adhérence, Rq : Suite avec au moins 2 valeurs d'adhérence est DV, Ex :  $(-1)^n$ , Rq : suite avec une seule valeur d'adhérence n'est pas nécessairement CV, Thm : Bolzano-Weierstrass.

#### 4) Suites de Cauchy

↔ **Amrani** : Déf : suite de Cauchy, Prop : suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy + tte suite de Cauchy est bornée, Thm : pour suite numérique CV  $\Leftrightarrow$  Cauchy, Ex :  $\sum_{k=1}^n 1/k$ .

↔ **Gourdon** : Tte série numérique ACV est CV.

↔ **Pommelet** : Construction de  $\mathbb{R}$  avec les suites de Cauchy de  $\mathbb{Q}$ .

#### 5) Limites inférieures et supérieures

↔ **Amrani** : Déf : lim inf et lim sup, Prop :  $\liminf \leq \limsup$  avec égalité ssi la suite CV vers cette valeur commune, Ex :  $u_n = (n+1)^{(-1)^n}$ , Prop :  $\liminf u_n = \inf(\text{adh}(u_n))$  et  $\limsup u_n = \sup(\text{adh}(u_n))$ .

### II - Applications aux fonctions continues

#### 1) Caractérisation séquentielle de la continuité

↔ **Gourdon** : Prop : continuité séquentielle, Ex :  $\sin(1/x)$  n'est pas prolongeable en 0 par continuité (on le montre avec  $u_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$  on a  $\sin(1/u_n) = (-1)^n$ )

#### 2) Suites récurrentes

↔ **Gourdon** : (*Exemples classiques*) Déf : suite arithmétique et suite géométrique, Prop : relations pour les suites arithmétiques et géométriques, Def : suite homographique, Rq :  $(u_n)$  définie  $\Leftrightarrow u_n \neq -d/c$ , Prop : relation sur les suites homographiques, Ex :  $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$  (**Rombaldi**)

↔ **Amrani** : Déf : suite récurrente, Cor : Si  $u_n$  récurrente et converge vers  $l$  alors  $f(l) = l$ , Ex :  $u_{n+1} = u - n^2 - u_n - 3$ , Thm : Comportement de  $(u_n)$  suivant la monotonie de  $f$ , Ex :  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ , Ex :  $u_{n+1} = 1/(2 - \sqrt{u_n})$ , Thm : Point fixe (**Gourdon**), Thm : Newton (**Rouvière**), ( + Thm : Galton-Watson (**Toulouse**) ).

#### 3) Suites équiréparties

↔ **FGN An2** Déf : suite équirépartie, Critère de Weyl

↔ **Gourdon** Conséquence : Somme de Riemann.

### III - Comportement asymptotique

#### 1) Sommation des équivalents

↔ **Gourdon** : Thm : sommation d'équivalents, App : Etude de  $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ .

#### 2) Formule de Stirling

↔ **Amrani** : Prop : Série télescopique a même nature que la suite associée, App : Formule de Stirling.

#### 3) Moyenne de Cesaro

↔ **Amrani** : Déf : moyenne de Cesaro, Prop : si  $(u_n)$  CV vers  $l$  alors sa suite de Cesaro aussi, C-ex : à la réciproque avec  $(-1)^n$ , App : Si  $(u_n)$  CV vers  $l \neq 0$  et si  $u_n \neq 0 \forall n$  alors  $(v_n)$  définie par  $n/v_n = 1/u_1 + \dots + 1/u_n$  CV vers  $l$ .

119.

- El Amrani, *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.* (pour I, II-3 & III-2-3)
- Gourdon, *Analyse* (pour ex, II-1-2-4 & III-1)
- (Merlin, *Methodix Analyse* (1 ex))
- (Pommelet, *Cours d'analyse* (pour construction de  $\mathbb{R}$  par les suites de Cauchy))
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2* (Critère de Weyl)
- (Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*)
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel* (Newton)
- Toulouse, *Thèmes de probabilités et statistique* (Galton-Watson)

120. **Rapport du Jury** : Rien

## 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions. [121](#) [122](#)

Cadre :  $f, g$  deux fonctions d'un intervalle  $I$  non réduit à un singleton de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Rq : **Rajouter pleins d'exemples dans FGN Analyse 1**

### I - Définitions et premiers exemples

#### 1) Relations de comparaison

↔ **Gourdon** : Déf : dominée/négligeable/équivalentes et notations, (1 ex dans **Rombaldi**), Prop : compatibilité avec la somme / les puissance et le log, Rq : pas compatible avec l'exp + c-ex (**Methodix**).

#### 2) Développements asymptotiques

↔ **Gourdon** : Déf : échelle de comparaison, Ex : au vois de  $l^\infty$  et au vois de 0, Déf : dvpt asymptotique, Rq : unicité du dvpt asymptotique + partie principale, Ex :  $\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$ , C-ex à l'existence (sans ref).

#### 3) Développements limités (DL)

↔ **Gourdon** : Déf : DL en 0, Rq : on peut définir un DL en un point quelconque + un DL est un dvlpt asymptotique, Prop : unicité du DL, Prop : si  $f$  admet un DL au vois de 0 alors  $f$  dérivable en 0, Rq : l'existence d'un DL d'ordre  $n \geq 2$  n'implique pas l'existence de  $f''(0)$ , Prop : formule de Taylor Young, Ex :  $e^x \cos(x) (1+x)^\alpha$ , App : Théorème centrale limite.

#### 4) Opérations sur les développements limités

↔ **Gourdon** : Prop : DL de  $f$  à partir du DL de  $f'$ , Ex :  $\log(1+x)$ , Prop : DL de  $f'$  à partir du DL de  $f$ , Ex :  $\sin(x)$ , Prop : DL de  $f+g$  /  $fg$  et  $\frac{f}{g}$ , Ex :  $\tan(x)$ , Prop : DL de  $f \circ g$ , Ex :  $\log(\frac{\sin(x)}{x})$ , App : calcul de limite.

### II - Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale

#### 1) Primitive d'une fonction

↔ **Gourdon** : Thm : Si  $\int_a^b g(t)dt$  alors  $f = O(g)$  (resp o, resp  $\sim$ )  $\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = O(\int_a^x g(t)dt)$  (resp o, resp  $\sim$ ) et si  $\int_a^b g(t)dt$  alors  $f = O(g)$  (resp o, resp  $\sim$ )  $\Rightarrow \int_x^b f(t)dt = O(\int_x^b g(t)dt)$  (resp o, resp  $\sim$ ), Ex :  $\log(x) = o(x^\alpha)$ , Ex :  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  (**Pommellet**), Ex :  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx \sim -\log(t)$  en  $0^+$ .

#### 2) Méthode de Laplace

↔ **Rouvière** : Thm : méthode de Laplace, Appli : formule de Stirling.

### III - Application à la recherche de développements asymptotiques de suites

#### 1) Développements asymptotiques de suites récurrentes

↔ **Pommellet** : Thm :  $u_n \rightarrow l$  et  $\sum \alpha_n$  diverge alors la suite des moyennes  $\alpha$ -pondérées tend vers  $l$ , App : recherche d'un équivalent d'une suite récurrente.

↔ **Rouvière** : Thm : Méthode de Newton, Ex : estimer  $a = \sqrt{y}$ .

#### 2) Développements asymptotiques de sommes partielles

↔ **Pommellet** : Thm :  $f$  fonction décroissante positive alors  $\sum_{k=0}^n f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t)dt \geq \sum_{k=1}^{n+1} f(k)$ , App : critère de cv des séries de Riemann.

↔ **Gourdon** : Thm :  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  séries à termes positifs tq  $u_n \sim v_n$  alors si  $\sum u_n$  cv alors  $\sum v_n$  cv et les restes sont équivalents / si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge et les sommes partielles sont équivalentes, App : Série harmonique + appli

#### 3) Utilisation des séries entières

↔ **FGN An 2** : Prop : Partitions d'un entier en parts fixées

121.

- Gourdon, *Analyse* (pour presque tout)
- Pommellet, *Cours d'analyse* (pour III)
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* (pour méthode de Newton)
- Merlin, *Methodix Analyse* (1 prop + 1 rmq)
- Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle* (1 exemple)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2* (partitions d'un entier en parts fixées)

122. **Rapport du Jury** : Rien

## 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples et applications. 123 124

Cadre : Soit  $E$  un evn. Soit  $I \subset E$  et  $f : I \rightarrow E$  tq  $f(I) \subset I$ . On considère une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  vérifiant  $u_0 \in I$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

### I - Dépendance vis à vis de $f$ (ou Comportement selon $f$ )

- 1) Cas des fonctions monotones ( $E = \mathbb{R}$ )
  - $\hookrightarrow$  Prop : monotonie de  $(u_n)$  en fonction de la monotonie de  $f$ , Ex :  $I = [0, +\infty[$  et  $f(x) = x^2$ .
- 2) Continuité
  - $\hookrightarrow$  Prop : si  $f$  continue et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  alors  $f(l) = l$ , Ex :  $I = [0, 1]$  et  $f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ , Thm :  $f : [a, b] \mapsto [a, b]$  continue alors  $(u_n)$  converge  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ .
- 3) Suites arithmétiques et géométriques ( $E = \mathbb{R}$ )
  - $\hookrightarrow$  Déf : suite arithmétique de raison  $a$ , Déf : suite géométrique de raison  $q$ , Prop : convergence d'une suite géom en fct de  $|q|$ , Déf : suite arithmético-géométrique.
- 4) Suites homographiques ( $E = \mathbb{R}$ )
  - $\hookrightarrow$  Déf : suite homographique, Prop : calcul de suite homographique à l'aide de l'équation caractéristique, Ex :  $u_{n+1} = \frac{au_n+1}{u_n+a}$ .
- 5) Récurrences linéaires à coefficients constants ( $E = \mathbb{C}^h$ )
  - $\hookrightarrow$  Si  $f$  linéaire et  $A$  sa matrice on pose  $U_n = {}^t(u_n, \dots, u_{n+h-1})$  alors  $U_{n+1} = AU_n = A^n U_0$ , forme de  $A$  lorsque c'est une récurrence linéaire à coeff constants d'ordre  $h$ , Prop : équation caractéristique ( $\mathcal{E}$ ) et forme de  $(u_n)$  en fct des racines de ( $\mathcal{E}$ ).
- 6) Fonctions contractantes
  - $\hookrightarrow$  Thm : du point fixe (avec déf de  $k$ -contractante), Cor, Ex :  $u_{n+1} = \sin(u_n)/2$ .

### II - Classification des points fixes

- 1) Cas réel
  - $\hookrightarrow$  Déf : attractif + superattractif + répulsif, Rq : cas attractif  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ , Cas critique + 2 ex.
- 2) Cas vectoriel ( $E = \mathbb{R}^m$ )
  - $\hookrightarrow$  Notation :  $\rho(f)$  = rayon spectral de  $f$ , Thm :  $a$  un pt fixe de  $f$  alors  $(\exists V$  vois de  $a$  tq  $f(V) \subset V$  et une norme  $N$  tq  $f|_V$  soit contractante pour  $N$ )  $\Leftrightarrow (\rho(f'(a)) < 1)$  / on dit que  $a$  est attractif.
- 3) Orbite périodique
  - $\hookrightarrow$  Déf : point  $n$ -périodique, Thm de Sarkowski, C-ex :  $f : [0, 1/2] \mapsto [1, 2]$  tq  $f(x) = 1/(1-x)$  : tous les points sont de période 3.

### III - Applications en analyse numérique et probabilités

- 1) Méthode de Newton
  - $\hookrightarrow$  Méthode de Newton, Ex.
- 2) Méthode du gradient à pas optimal
  - $\hookrightarrow$  Inégalité de Kantorovitch, Gradient à pas optimal.
- 3) Processus de Galton-Watson
  - $\hookrightarrow$  Déf : processus de G-W  $Z_{n+1} = \sum_{j=0}^{Z_n} X_j^{(n)}$  où  $X_j^{(n)} \tilde{\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \delta_j$  iid, Rq :  $Z_n$  représente la taille de la génération  $n$  et  $X_j^{(n)}$  le nombre de descendants de l'individu  $j$  de la génération  $n$ , Thm : Processus de Galton-Watson dessin de l'arbre.

123.

- Xavier Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (pour I).
- Rombaldi, *Elements d'analyse réelle* (pour suites arithmético-géométriques).
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* 3ème édition (pour II-1 & DVPT 2).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, 2ème édition (pour thm dans I-2 & DVPT 1).
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (pour II-1-2 & III-2).
- Toulouse, *Thèmes de probabilités et statistiques* (pour DVPT 3)

**124. Rapport du Jury** : Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ . Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants rarement évoqués. Cette leçon doit être l'occasion d'évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, méthode du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de système linéaire, schéma d'Euler...

## 228- Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples. 125 126

Cadre :  $I=]a, b[$  avec  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

### I - Introduction aux notions de continuité et dérivabilité

#### 1) Fonctions continues

↔ **Rombaldi** : Déf : continuité en un point + continuité totale, C-ex : fct caractéristique de  $\mathbb{Q}$ , Ex : fonction constante, Prop : continuité séquentielle, C-ex :  $f(x) = \cos(1/x)$ , Thm : prolongement par continuité, Ex :  $x \sin(1/x)$ , Prop :  $|f| / f + g / fg / 1/f / g \circ f$ , Déf : uniformément continue, Rq : unif continue  $\Rightarrow$  continue, C-ex :  $x^2$  pas unif continue, Thm : fct continue sur un compact est unif continue, Thm : fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

#### 2) Fonctions dérivables

↔ **Rombaldi** : Déf : dérivabilité, Thm :  $f$  dérivable en  $a$  alors  $f$  continue en  $a$ , C-ex :  $|x|$  pas dérivable en 0 et autre fonction dérivable en aucun point, Ex : fonctions continues nulle part dérivables (**Z-Q**), Prop : dérivation  $\lambda f + \mu g / fg / 1/f / g \circ f / f^{-1}$ , Ex : arcsin, Déf :  $\mathcal{C}^1 + \mathcal{C}^n$ , C-ex  $x^2 \sin(1/x)$ , Déf :  $\mathcal{C}^\infty$ , Ex : fct polynomiales, Thm : formule de Leibniz, Thm : prolongement de la dérivée.

### II - Résultats fondamentaux

#### 1) Théorème des valeurs intermédiaires

↔ **Rombaldi** : Thm :  $I$  intervalle  $f$  continue alors  $f(I)$  intervalle, Thm des valeurs intermédiaires, Thm : si  $a$  extremum de  $f$  dérivable alors  $f'(a) = 0$ , Thm Darboux, Ex.

#### 2) Théorème de Rolle et conséquences

↔ **Rombaldi** : Thm de Rolle, Ex, App : si  $P$  poly scindé alors  $P'$  scindé, Thm accroissements finis, App :  $f$  croissante  $\Leftrightarrow f' \geq 0$ , C-ex :  $-1/x$ .

#### 3) Formules de Taylor

↔ **Rombaldi** : Taylor Lagrange, Taylor avec reste intégral, Taylor-Young, App : calcul de dvp limité.

### III - Etude de certaines classes de fonctions

#### 1) Cas des fonctions monotones

↔ **Rombaldi** : Thm : si  $f$  monotone alors nombres de pts de discontinuité au plus dénombrable, Prop :  $f'$  monotone alors  $f$  continue, (Prop : fct monotone est pp dérivable)

#### 2) Fonctions convexes

↔ **Gourdon** : Déf : convexe, Prop : convexe  $\Rightarrow$  continue + relation entre convexe +  $f'$  croissante + courbe de  $f$ , Coro : si  $f$  2 fois dér alors  $f$  convexe  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ , App : inégalité entre moyen arithmétique et géométrique.

#### 3) Cas des fonctions lipschitziennes

↔ **Rombaldi** : Déf : lipschitzienne, Prop :  $f$  lip alors  $f$  unif continue, Cor :  $f$  dér avec  $f'$  bornée alors  $f$  unif continue, (Prop : fct lipschitzienne est pp dérivable).

#### 4) Suites de fonctions

↔ **Gourdon** : Thm : suite  $f_n$  converge unif et  $f_n$  continue alors  $f$  continue, C-ex :  $x^n$  (**Hauchecorne**), Thm : Weierstrass par les polynômes de Bernstein (**Gourdon**).

#### 5) Intégrales dépendant d'un paramètre

↔ **Gourdon** : Thm : continuité des intégrales à paramètres, Thm : dérivabilité des intégrales à paramètres, App : fonction gamma, C-ex (**Hauchecorne**).

---

125.

- Rombaldi, *Eléments d'analyse réelle* (pour presque tout)
- Gourdon, *Analyse* (pour III-2-4-5)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques* (pour quelques c-ex)

126. **Rapport du jury** : Un plan découpé en deux parties (I continuité, II dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Les théorèmes de bases doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants. Les candidats doivent disposer d'un exemple e fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La dérivabilité presque partout des fonctions lipschitzienne relève de cette leçon. Enfin les applications du théorème d'Ascoli (par ex les opérateurs intégraux à noyau continu, le thm de Peano, etc..) sont les bienvenus.

## 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. 127 128

### I - Fonctions monotones

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **RDO** : Déf : fonction ↗/↘ et strict ↗/↘ monotone, Ex :  $\frac{1}{x}$  / fct de répartition d'une va / limite simple de fct monotones, Prop : f monotone et injective ⇔ f strict monotone, Prop : × par un scalaire / produit / somme et composition de fonctions ↗, Rq : fct monotones ne sont pas sev, Thm : comportement de  $(u_n)_n$  où  $u_{n+1} = f(u_n)$  en fonction de la monotonie de f (**Rombaldi**).

#### 2) Existence de limite et continuité

↔ **RDO** : Thm : limite en un point d'une fonction monotone, Cor : limite finie dans les points non extrémaux, Thm : f monotone alors ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable, Ex : fonctions strict croissantes dont les points de discontinuité sont denses (**Hauchecorne**), Thm : f monotone est continue ⇔ f(I) est un intervalle, Cor : si f strict monotone continue alors f homéomorphisme de I sur f(I), Thm : Réciproque : f homéo de I sur J alors f est strict monotone, Ex : sinus et arcsinus.

#### 3) Monotonie et dérivabilité

↔ **RDO** : Thm : f continue sur I et dérivable à droite sur  $\overset{\circ}{I}$  : f cste/coissante/décroissante ⇔  $f'_d(t) = 0 / \geq 0 \leq 0$ , Thm : caractérisation des appli strict monotones, Ex :  $x^3$  strict ↗ et  $\{x | f'_d(x) = 0\} \neq \emptyset$ , Thm : une fonction monotone est dérivable pp (**Pommellet**).

#### 4) Comparaison série-intégrale

↔ **Gourdon** : Prop : comparaison série et intégrales pr fct ↘ positive, App : série harmonique.

### II - Fonctions convexes

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Rombaldi** : Déf : fonction convexe / concave / strict convexe, Ex :  $x \rightarrow |x|$  et exp, Ex : limite simple de fct convexes, Rq : pas vrai pour strict convexe, Ex : f affine ⇔ f convexe et concave, Thm : f convexe ⇔ son épigraphe est convexe, Rq : cordes au-dessus de la courbe, Prop : combi linéaire à coeff positifs de fct convexe, C-ex : prod de fct convexe pas convexe avec x et  $x^2$ , composée de fct convexe pas convexe avec f convexe et  $f \circ h$  où  $h(x) = -x$ .

#### 2) Caractérisation des fonctions convexes

↔ **Rombaldi** : En dim 1 : Thm : fct continue est convexe ⇔  $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ , C-ex : projection sur  $\mathbb{Q}$  parallèlement à un supplémentaire pas convexe (**Hauchecorne**), Thm : f convexe ⇔ pente croissante ⇔ pour tt point le taux d'accroissement est croissant, Thm :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cste ⇔ elle est convexe et majorée, C-ex :  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , Thm : si f dérivable alors f convexe sur I ⇔ f' est croissante ⇔ la courbe au-dessus de la tangente, Thm : si f 2 fois dérivable elle est convexe ⇔  $f'' \geq 0$ , Thm : Processus de Galton-Watson, Ex : log et  $x^p$ .

↔ **OA** En dim > 1 : Thm : équivalences de la convexité dans  $\mathbb{R}^n$  avec diff et hessienne, App : Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$  alors  $x \rightarrow \langle Ax, x \rangle$  convexe ⇔ A positive.

#### 3) Régularité en dimension 1

↔ **Rombaldi** : Thm : f convexe alors f à une dérivée à droite et à gauche pr  $a \in \overset{\circ}{I}$  et croissance des  $f'_g$  et  $f'_d$ , Cor : une fct convexe sur I est continue sur  $\overset{\circ}{I}$ , C-ex : fonction convexe pas forcément continue sur I avec  $f = 1_{\{0,1\}}$ , Thm : I ouvert f convexe ⇔ elle est continue et dérivable à droite sur I de dérivée à droite croissante.

### III - Inégalités de convexité et optimisation

#### 1) Inégalités de convexité

↔ **Rombaldi** : Thm : inégalité arithmético-géométrique, Thm : Hölder, Cor :  $\| \cdot \|_p$  est une norme, Thm : Jensen, Prop : Jensen dans le cas de va, App : la variance est positive, Thm : Hoeffding (**Ouvrard 2**), Thm : inégalité de Kantorovitch (**Hiriart-Urruty**).

#### 2) Optimisation

↔ **Rombaldi** : Thm : f convexe, dérivable en  $a \in \overset{\circ}{I}$  alors f a un min global en a.

↔ **OA** : Lem : minimum d'une fct convexe et différentiabilité, Lem : minimum d'une fct convexe et hessienne, Lem : fct strict convexe admet au plus un minimum global, Prop : det  $S_n^{++}$ , John Loewner, Thm : Méthode de Newton, Prop : gradient à pas optimal.

127.

- Ramis-Deschamps-Odoux, *Cours de mathématiques spéciales 3, topologie et éléments d'analyse* (pour I)
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle* (pour presque tout II & III)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Gourdon, *Analyse*
- Beck, *Objectif Agrégation*

**128. Rapport du Jury** Réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité pp des fonctions monotones est important. Illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs (même si ne remplacent pas un calcul). La monotonie concerne les fct réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne aussi les fct définies sur une partie convexe de  $\mathbb{R}^n$  (beaux exemples d'utilisation). L'ev engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Pour les candidats aguerris, la dérivation au sens des distributions donne caractérisations plus générales de la monotonie et de la convexité.



## 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

129 130

Cadre : Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

### I - Séries numériques et convergence

#### 1) Définition et premières propriétés

↔ **El Amrani** : Déf : somme partielle/série/série cvgte, Ex :  $\sum a^n$ , Déf : reste, Rq :  $\mathbb{R}_n \rightarrow 0$ , Prop : ensemble des séries cvgte  $\mathbb{K}$ -ev, Rq : on ne peut rien dire sur la somme de 2 séries dvgtes, C-ex :  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{-1}{n}$ , Prop : si série cvgte alors  $u_n \rightarrow 0$ , C-ex :  $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ , App :  $\sum \cos(\alpha n)$  dvge grossièrement si  $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ , Prop : série télescopique ont même nature que la suite correspondante, Ex :  $\frac{1}{n(n+1)}$ .

#### 2) Critère de Cauchy et série absolument convergente

↔ **El Amrani** : Déf : critère de Cauchy, Ex : série harmonique, Déf : absolument cvgte, Thm : toute série abs cvgte est cvgte, C-ex :  $u_{2p} = -1/p$   $u_{2p-1} = 1/p$ , Déf : semi-cvgte.

### II - Séries à termes positifs

#### 1) Comparaison

↔ **El Amrani** : Lemme : série à termes  $\geq 0$  cvgte  $\Leftrightarrow (S_n)_n$  est majorée, Thm : quand  $u_n \leq v_n$ , App : quand  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ , Ex :  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$  et  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , Thm : quand  $u_n \sim v_n$ , C-ex :  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  (**Hauchecorne**), Thm : quand  $u_n = O(v_n)$ , Thm :  $u_n = o(v_n)$ , Rq : les 2 thm restent vrais si  $u_n$  à valeurs complexes, Thm : comparaison série/intégrale.

#### 2) Séries de Riemann et de Bertrand

↔ **El Amrani** : Thm : séries de Riemann, App :  $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$ , Cor : étude de  $n^\alpha u_n$ , Ex :  $\sum \frac{1}{\ln(n)}$  dvge, Prop : séries de Bertrand.

### III - Série à terme général quelconque

#### 1) Règles de Cauchy et de d'Alembert

↔ **El Amrani** : Thm : règle de Cauchy général, Ex :  $\sum (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$ , Thm : règle de d'Alembert usuelle, Ex :  $\sum \frac{a^n}{n}$ .

#### 2) Méthodes d'études

↔ **El Amrani** : Soit on se ramène à séries à termes positifs soit ce qui suit : Déf : série alternée, Prop : CSSA, Ex :  $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ , C-ex :  $\sum (-1)^n a_n$  avec  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ , Thm : quand  $u_n = a_n b_n$ , Ex : avec  $b_n = (-1)^n$  on a le CSSA.

#### 3) Produit de Cauchy de deux séries

↔ **El Amrani** Déf : produit de Cauchy, Ex : prod de Cauchy de 2 cvgte peut être dvgte, Thm : si une des deux est abs cvgte alors le prod cvgte et si les deux acv alors le produit acv, App :  $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ .

#### 4) Groupement et permutation des termes

↔ **El Amrani** : Déf : groupement de termes, Diverses prop sur les groupement de termes, Prop :  $\sum u_n$  et  $\sum 2^n u_n$  sont de même nature (**Hauchecorne**), C-ex qui suit (**Hauchecorne**), Déf : commutativement convergente, Thm : série abs cvgte est commutativement cvgte

#### 5) Séries doubles

↔ **Hauchecorne** : Thm : inversion de l'ordre de sommation des séries doubles, C-ex :  $u_{n,p} = \frac{-1}{2^n}$  si  $n > 1$  et  $= 1$  si  $n = 1$ , App : Nombre de Bell

### IV - Utilisation de fonctions

#### 1) Séries entières

↔ **El Amrani** : Déf : série entière, Lemme d'Abel, Déf : RCV, Rq : cercle d'incertitude, thm d'Abel angulaire et taubérien faible

#### 2) Séries de Fourier

↔ **El Amrani** : Déf : coeff de Fourier exponentiels/coeff de Fourier trigonométriques, Déf : série de Fourier, Thm : Parseval, Thm : Dirichlet, App :  $\sum \frac{1}{n^2}$ , App : formule sommatoire de Poisson + cor

129.

- El Amrani, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions* (pour presque tout)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques* (pour III-4 plus un ou deux c-ex)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2* (pour nombre de Bell)
- Gourdon, *Analyse* (Abel angulaire et taubérien faible, formule sommatoire de Poisson)

**130. Rapport du Jury** : De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel du plan. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, etc...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

## 232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$ . Exemples. <sup>131 132</sup>

### I - Méthodes de point fixe

#### 1) Théorème du point fixe

↔ **Demailly** : Thm :  $\phi$  strictement contractante sur espace complet  $\Rightarrow$  admet un unique point fixe  $a$  et la suite  $x_{p+1} = \phi(x_p)$  converge vers  $a$ , Prop : la convergence est exponentiellement rapide, Prop : le thm reste vrai si  $c$ 'est une itérée qui est strictement contractante, App : trouver un zéro de  $f$  en étudiant  $\phi(x) = x - Cf(x)$ .

#### 2) Point attractif et répulsif

↔ **Demailly** : (ici  $\phi$  est  $C^1$ ) Déf : point attractif + point répulsif, Rq : si  $|\phi'(a)| = 1$  on ne peut rien dire, Ex : point attractif et point répulsif avec  $|\phi'(a)| = 1$ , Prop : comportement graphique, Ex :  $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ .

### II - Méthodes usuelles pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

#### 1) Méthode de dichotomie

↔ **Pommellet** : Théorème des valeurs intermédiaires, explication de la dichotomie.

#### 2) Méthode de Newton

↔ **Rouvière** : Méthode de Newton, Ex : calcul de  $\sqrt{y}$ .

↔ **Pommellet** : La méthode de Newton sur un polynôme réel scindé.

#### 3) Méthode de la sécante

↔ **Demailly** : Explication de la méthode, Thm : convergence de la méthode et vitesse de convergence, Rq : inconvénient de la méthode si  $x_p$  et  $x_{p-1}$  sont trop proches.

### III - Méthode pour les fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$

#### 1) Cas affine

↔ **Ciarlet** : On veut résoudre  $Au = b$  on se ramène à  $u = Bu + c$  explication de la méthode, Déf : rayon spectral, Prop : conditions nécessaires et suffisantes pour avoir convergence, Explication de la méthode : A=M-N, Tableau récapitulatif, Thm : condition suffisante pour avoir convergence et condition nécessaire pour avoir convergence.

#### 2) Méthode de descente

↔ **Hiriart-Urruty** : Explication de la méthode de descente

#### 3) Méthode de Newton-Raphson

↔ **Demailly** Explication de la méthode, Thm : si  $f$   $C^2$  et  $f'(a)$  est inversible alors a point fixe attractif, Ex : résolution d'un système.

---

131.

- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (pour I, II 3 et III 3)
- Pommellet, *Cours d'analyse* (pour II 1)
- Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* (pour III 1)
- Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe exercices corrigés* (pour III 2)

132. **Rapport du Jury** : Trop de candidats se limitent au simple cas où  $X$  est une variable scalaire. Il serait bon d'envisager les extensions des méthodes classiques dans le cas vectoriel. Au delà de la méthode de Newton, d'intéressants développements peuvent s'intéresser à la résolution de systèmes linéaires, notamment par des méthodes itératives.

## 234 - Espaces $L^p$ , $1 \leq p \leq +\infty$ . 133 134

Cadre :  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace mesuré.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I - Définitions et premières propriétés

#### 1) Espaces $\mathcal{L}^p$

$\hookrightarrow$  Def :  $\mathcal{L}^p$ , Def : norme, Def : supess, Def :  $\mathcal{L}^\infty$ , Ex : mesure de comptage :  $l^p(\mathbb{N})$ , Thm : inégalités de Hölder et Minkowski, Rq : espaces semi-normés.

#### 2) Espaces $L^p$

$\hookrightarrow$  Def :  $L^p$ , c'est un  $\mathbb{K}$ -ev normé, Thm de Riesz-Fischer.

#### 3) Convergence dans les espaces $L^p$

$\hookrightarrow$  Thm : si  $f_n \rightarrow f$  en norme  $p$  avec  $f_n, f \in L^p$  alors il existe une sous suite qui converge  $\mu$ -pp vers  $f$  (démontré dans la preuve de Riesz-Fischer), C-ex, Thm : convergence  $L^p$ -dominée, C-ex : sans domination.

### II - Relations entre les espaces $L^p$ et densité

#### 1) Inclusions

$\hookrightarrow$  Thm : inclusions dans le cas d'une mesure finie et de la mesure de comptage, C-ex : pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , Rq : en mesure finie  $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$ .

#### 2) Densité dans les espaces $L^p$

$\hookrightarrow$  Thm : l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans  $L^p$  pour  $p < \infty$  et l'ensemble des fonctions étagées est dense dans  $L^\infty$ , Thm : sur  $\mathbb{R}$  l'ensemble des fonctions en escalier à support compact / continues à support compact est dense dans  $L^p$  pour  $p < \infty$ , App : Riemann-Lebesgue.

#### 3) Régularisation par convolution et densité

$\hookrightarrow$  But : régulariser des fonctions, Def : produit de convolution, Thm : si  $f \in L^1$  et  $g \in L^p$  alors  $f * g \in L^p$  et majoration de la norme, Thm : si  $f \in L^p$  et  $g \in L^{p'}$  alors  $f * g$  bornée et majoration de la norme, Prop :  $g \in C_c^\infty$  et  $f \in L^1 \Rightarrow f * g \in C^\infty$ , Def : suite régularisante, Thm :  $f \in L^p$  avec  $p < \infty \Rightarrow \rho_n * f \xrightarrow{L^p} f$ , Cor :  $C_c^\infty(\Omega)$  dense dans  $L^p(\Omega)$  pour  $p < \infty$ .

#### 4) (+ Dualité (mais pas facile...))

$\hookrightarrow$  Thm :  $L^p$  est réflexif pour  $p \neq 1, \infty$ , Thm de représentation de Riesz pour  $p < \infty$ , Csq : on identifie  $L^{p'}$  et  $(L^p)'$  (avec  $p'$  conjugué de  $p$ ), Rq : Le dual de  $L^\infty$  ne coïncide pas avec  $L^1$ , Thm :  $L^p$  est séparable pour  $p < \infty$ .

### III - Applications des espaces $L^p$

#### 1) Transformée de Fourier dans $L^1$ (et $L^2$ si on se le sent)

$\hookrightarrow$  Déf : transformée de Fourier, Thm : injectivité de la transfo dans  $L^1$ , Thm d'inversion, (Thm : Fourier Plancherel  $\rightarrow$  prolongement à  $L^2$ ), App : EDP par ex equation de la chaleur (**Laamri**).

#### 2) Probabilités

$\hookrightarrow$  Prop : CV  $L^p \Rightarrow$  CV en proba, Def : uniforme intégrabilité pour des va, Thm :  $(X_n)$  CV  $L^p \Leftrightarrow (|X_n|^p)$  u.i. et  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \in L^p$ , C-ex.

#### 3) (+ Sobolev (bof bof...))

$\hookrightarrow$  Def :  $H^1$  et  $H^2$ , Thm :  $H^1$  muni de sa norme est un Banach, Prop : inégalité de Poincaré, App : résolution du pb de Sturm-Liouville.

### IV - Le cas particulier de $L^2$

#### 1) Structure hilbertienne

$\hookrightarrow$  Def : produit scalaire qui fait de  $L^2$  un Hilbert, Csq :  $L^2$  vérifie thm de projection sur un convexe fermé + thm de représentation de Riesz, App : thm de Grothendick.

#### 2) $L^2(\mathbb{T})$ et séries de Fourier

$\hookrightarrow$  Notations :  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , Def : produit scalaire +  $e_n(x) = e^{inx} + c_n(f) + S_N(f)$ , Thm :  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne, expression de  $f$  en fonction des  $c_n(f)$ ,  $\|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow 0$ , formule de Parseval. App :  $\zeta(2)$  et  $\zeta(4)$ .

#### 3) Polynômes orthogonaux

$\hookrightarrow$  Def : fonction poids et  $L^2(I, \rho)$ , Thm :  $L^2(I, \rho)$  muni de son produit scalaire est un Hilbert, Thm : il existe une unique famille de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tq  $\deg(P_n) = n$ , Ex : polynômes de Hermite, Densité des polynômes orthogonaux

133.

- Brezis, *Analyse fonctionnelle* (I, II, III essentiellement + DVPT 1)
- Briane, Pagès, *Analyse, Théorie de l'intégration*, 5ème édition (I surtout, II, IV)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*, 2ème édition (III-1, IV-2-3)
- Ouvrard, *Probabilités 2*, 3ème édition (III-2)
- Maxime Zavidovique, *Un max de math* (DVPT 2)

134. **Rapport du Jury** : Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie  $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$  (ou même  $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$  si  $p \geq q$ ). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple  $\mathcal{L}^1 * \mathcal{L}^1$ ). Par ailleurs, les espaces associés à la mesure de décompte sur  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$  fournissent des exemples pertinents non triviaux.

## 235 - Problèmes d'inversion de limites et d'intégrales. 135 136

### I - Limites et intégration

#### 1) Cas de suites de fonctions

↔ Déf : CV uniforme, Thm : si  $f_n$  est continue sur un segment et la suite  $(f_n)_n$  CVU vers  $f$  alors on peut échanger limite et intégrale, C-ex :  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ , Cor : avec les séries, Thm : Beppo-Levy, App :  $\lim \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\alpha x} dx$ , Thm : lemme de Fatou, App : si  $(f_n)$  suite de fonctions intégrales CVS vers  $f$  et  $\sup \|f_n\|_1 < \infty$  alors  $f$  est intégrable, App : soit  $f$  croissante sur  $[0, 1]$  continue en 0 et 1 dérivable pp alors  $\int_0^1 f'(x) dx \leq f(1) - f(0)$ , Ex : avec inégalité stricte, Thm : CV dominée, App :  $f$  continue sur  $[0, 1]$  partout dérivable de dérivée bornée alors  $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0)$ , Thm : interversion somme intégrale sur un ensemble quelconque, App : Borel-Cantelli.

#### 2) Intégrales à paramètres

↔ Thm : continuité des intégrales à paramètres, C-ex :  $\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ , App : Fubini sur  $[a, b] \times [c, d]$ , Thm : dérivation des intégrales à paramètres, Cor : sur un compact pas besoin de l'hypothèse de domination, App : la fonction  $\Gamma$  est  $C^\infty$  et ses dérivées.

### II - Limites et séries

#### 1) Continuité et dérivabilité

↔ Thm : continuité de la série quand il y a CVU, Cte-ex :  $\sum (1-x)x^n$ , Thm : dérivabilité des séries.

#### 2) Séries entières

↔ Déf : rayon de convergence, Thm : convergence normale absolue / normale / divergence selon la position par rapport au RCV, Déf : disque ouvert de CV, Thm : la somme d'une série entière est  $C^\infty$  sur le disque ouvert de CV, App : [Thm d'Abel angulaire et taubérien faible], App d'Abel : calcul de  $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

#### 3) Séries doubles

↔ Thm sur les séries doubles, C-ex : avec  $u_{n,p} = -\frac{1}{2^n}$  si  $n \geq 1$  et 1 sinon, App : nombres de Bell.

### III - Applications

#### 1) Holomorphie

↔ Thm : holomorphie sous le signe intégral, App : [prolongement de la fonction  $\Gamma$ ], App : [densité polynômes orthogonaux], App : calcul de la fonction caractéristique d'une gaussienne.

#### 2) Analyse de Fourier

↔ Déf : coefficients de Fourier, Thm de Riemann-Lebesgue : les coeff tendent vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , Déf : transformée de Fourier, App : [formule sommatoire de Poisson], Thm : la transformée de Fourier tend vers 0 en  $\pm\infty$ , Ex : transformée de Fourier de la gaussienne.

---

135.

- Gourdon, *Analyse* (un peu I, série entière, séries doubles et analyse de Fourier)
- Briane, Pagès, *Théorie de l'intégration* (pour bcp du I et Riemann Lebesgue)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques* (pour II-1, c-ex séries doubles)
- Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour le prolongement de  $\Gamma$ )
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (pour le thm d'holomorphie sous l'intégrale)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (pour nombres de Bell)

136. **Rapport du Jury** : Rien car "nouvelle" leçon

## 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. 137 138

Cadre :

### I - Méthodes directes

#### 1) Primitives

- ↔ Primitives usuelles : expression de l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  en fonction d'une primitive de  $f$ , Ex,
- ↔ Fractions rationnelles : décomposition en éléments simples + intégrales usuelles, Ex.
- ↔ Polynômes en sinus et cosinus : Pour calculer  $\int_a^b \sin^m(x)\cos^n(x)dx$  on linéarise si  $m$  et  $n$  sont pairs, et sinon on fait un changement de variable, Ex de linéarisation.

#### 2) Intégration par parties

- ↔ Thm : formule d'IPP, Ex : Wallis et fonction Gamma d'Euler.

#### 3) Changement de variables

- ↔ Thm : formule de changement de variables, Ex : règles de Bioche, Ex, Thm : changement de variables pour une fonctions à plusieurs variables, App : coordonnées polaires.

#### 4) Fubini

- ↔ Thm : Fubini sur deux pavés compacts, Ex : intégrale de Gauss, App : Intégrale de Fresnel

### II - Autres méthodes

#### 1) Pour des suites et séries de fonctions

- ↔ Thm : convergence dominée, Ex, Thm : convergence dominée forte (échange somme et intégrale), Ex.

#### 2) Sommes de Riemann

- ↔ Déf : somme de Riemann de  $f$ , Thm : convergence vers l'intégrale de  $f$ , Ex.

#### 3) Intégrales à paramètres

- ↔ Thm : continuité d'une intégrale à paramètres, Thm : dérivabilité d'une intégrale à paramètres, Ex : la dérivée est une fonction connue et on intègre, Ex : on trouve une équation différentielle sur l'intégrale cherchée.

#### 4) Analyse complexe

- ↔ Déf : indice d'un chemin, Déf : résidu, Thm : théorème des résidus, Ex, App : Formule des compléments.

### III - Calcul approché d'intégrales

#### 1) Méthode des rectangles

- ↔ Motivation : Chasles  $\Rightarrow$  on est ramené à évaluer l'intégrale de  $f$  sur des petits intervalles, Formule pour la méthode des rectangles à gauche et à droite, Formule pour la méthode du point milieu, Petits dessins.

#### 2) Méthode de Monte Carlo

- ↔ Description de la méthode, Avantage et inconvénient, Ex : approximation de  $\pi$  avec  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ .

---

137.

- Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (pour I & II-1-2-3)
- Merlin, *Méthodix analyse* (pour II-1)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*, 2ème édition (pour II-4)
- Amar, Matheron, *Analyse complexe* (pour II-4)
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, édition 2006 (pour III-1)
- Toulouse, *Thèmes de probabilités* (pour Monte-Carlo)

138. **Rapport du Jury** : Rien

## 239 - Fonctions définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. <sup>139 140</sup>

### I - Régularité

#### 1) Continuité

↔ **ZQ** : Thm : continuité des intégrales à paramètre, Rq : affaiblissement des hypothèses avec la domination sur  $\Gamma$  compact, Ex :  $\Gamma$  est bien définie et continue, C-ex (**Hauchecorne**).

#### 2) Dérivabilité

↔ **ZQ** : Thm : dérivabilité des intégrales à paramètre, Ex : expression de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a \cos(x))}{\cos(x)} dx$  (**Gourdon An**), C-ex (**Hauchecorne**), Thm : pour les fonctions  $C^k$ , Ex :  $\Gamma$  est  $C^\infty$ , Ex : étude de la fonction de Bessel (**FGN An4**).

↔ **Gourdon An** : Thm : Formule sommatoire de Poisson et son corollaire.

#### 3) Holomorphie

↔ **ZQ** : Thm : holomorphie des intégrales à paramètre.

↔ **OA** : App : prolongement de  $\Gamma$  Ex : transformée de Fourier d'une gaussienne.

↔ **ZQ** : Ex : la fonction  $\zeta$  est holomorphe.

### II - Convolution

#### 1) Définition et premières propriétés

↔ **OA** : Déf : convolution, Prop : pour  $f, g \in L^1$ , Prop : pour  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ , Prop : pour  $f \in L^1$  et  $g \in L^p$  (**Brezis**), Prop : pour  $f \in L^1$  et  $g \in C_c^\infty$ .

#### 2) Identités approchées

↔ **OA** : Déf : identité approchée, Ex : dilatation, Thm : convergence de  $\varphi_n * f$  selon la régularité de  $f$ , App :  $C_c^\infty$  est dense dans  $L^p$ , Ex : noyau de Fejer  $K_N$  et convergence quand uniforme de  $K_N * f$  quand  $f$  est continue.

### III - Transformées de Fourier et de Laplace

#### 1) Transformée de Fourier

↔ **ZQ** : Déf : transformée de Fourier, Thm : la transformée de Fourier est continue et tend vers 0 en l'infini.

↔ **OA** : Thm : injectivité de la transformée de Fourier, App : densité des polynômes orthogonaux.

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : fonction caractéristique, Rq : si  $X$  est de densité  $f$   $\varphi_X$  est la transformée de Fourier de  $f$ , Thm : la fct caractéristique caractérise la loi, Ex : de fct caractéristiques, Thm : lien entre dérivabilité de la fonction caractéristique et existence de moments.

#### 2) Transformée de Laplace

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : transformée de Laplace, Ex (**Cottrell**), Thm : elle caractérise la loi, Prop : DSE de la transformée de Laplace, App : inégalité de Hoeffding (**Ouvrard 2**).

### IV - Etude asymptotique

1) ↔ **Gourdon An** : Prop : lemme de Césaro (**sans ref**), App : intégrale de Fresnel.

↔ **ZQ** : Thm : méthode de Laplace, App : formule de Stirling.

---

139.

- Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour beaucoup)
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* (pour beaucoup)
- Gourdon, *Analyse* (pour des exemples et dvpt)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Barbe-Ledoux, *Probabilités* (pour les proba)

140. **Rapport du Jury** : Cette leçon doit être enrichie par des études et méthodes asymptotiques et les transformations classiques (Fourier, Laplace, ...).

# 240 - Produit de convolution. Transformation de Fourier. Applications. 141 142

## I - Convolution

### 1) Définitions et exemples

↔ **OA** : Déf : convolution de  $f$  et  $g$ , But : régulariser  $f$  en faisant une moyenne pondérée par  $g$  des valeurs de  $f$  en chaque point, Ex :  $f \star 1_{[-1/2, 1/2]}$ , Rq : déf convolution pour fctns  $2\pi$ -périodiques.

### 2) Propriétés de la convolution

↔ **OA** : Prop : commutativité de la convolution, C-ex : la convol n'est pas associative avec  $f = 1_{\mathbb{R}^+}$ ,  $g = 1_{[-1, 0]} - 1_{[0, 1]}$  et  $h = 1$  (**Laamri**), Prop : convolution dans  $L^1$ , Prop : convolution de  $f \in L^1$  et de  $g \in L^p$ , Rq : convolution dans  $L^1$  n'apporte pas de régularité, Prop : convol  $L^p$  avec  $L^q$ .

↔ **Laamri** : Déf : support d'une fct, Ex :  $\text{supp}(1_{\mathbb{Q}})$ , Prop :  $\text{supp}(f \star g)$  avec  $f \in L^1$  et de  $g \in L^p$ , Ex : Si  $f$  et  $g$  sont tous 2 à  $\text{supp}$  compact alors  $f \star g$  aussi, Ex :  $\text{supp}(1_A \star 1_B)$ .

### 3) Convolution et régularisation

↔ **OA** : Thm : dérivation de la convolée, Ex :  $g(x) = \exp(-1/(1-x^2))$  et densité de la gaussienne, Prop :  $f \in C_c^k$  et  $g \in L_{loc}^1$  alors  $f \star g \in C^k$  (**Laamri**), Déf : identité approchée, Ex : avec densité de la gaussienne, Thm : CV de la convolée d'une fct avec une identité approchée, App : noyau de Fejer + noyau de Dirichlet, App : densité de  $C_c^\infty$  dans  $L^p$ .

## II - Transformation de Fourier

### 1) Dans $L^1(\mathbb{R})$

↔ **Rudin** : Déf : transformée de Fourier (TF) d'une fonction  $L^1$ , Ex : TF de  $f(x) = 1_{[-a, a]}(x)$  (**Laamri**), Lem : (Riemann-Lebesgue) Si  $f \in L^1$  alors  $\widehat{f} \in C^0$  et  $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ , Prop : Propriété de TF.

↔ **Laamri** : App : pas d'élément neutre pour  $\star$ , App : Si  $f \star f = 0$  dans  $L^1$  alors  $f=0$  p.p.

↔ **Rudin** : Thm d'inversion, Thm : injectivité de la TF, App : densité des polynômes orthogonaux (**OA**).

### 2) Dans $L^2(\mathbb{R})$

↔ **Rudin** : Thm : Plancherel, Rq : densité de  $L^1 \cap L^2$  dans  $L^2$  assure de façon unique la correspondance entre  $f$  et  $\widehat{f}$  dans  $L^2$ , Thm : inversion de Fourier, Ex :  $f(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$  (**Laamri**).

### 3) Dans $S(\mathbb{R})$

↔ **Zuily** : Déf :  $S(\mathbb{R})$ , Ex :  $C_c^\infty$  et  $e^{-x^2}$ , Rq :  $S \subset L^1$  donc la TF est bien définie, Prop :  $u \rightarrow x^\alpha u$  et  $u \rightarrow u^{(\alpha)}$  sont continues de  $S$  dans  $S$  et stabilité de  $S$  par produit, Thm : pour  $u, v \in S$  alors  $u \star v \in S$  et  $\widehat{u \star v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$ , Thm : la TF est une appli linéaire bijective et bicontinue de  $S$  dans  $S$ .

### 4) Dans $S'(\mathbb{R})$

↔ **Zuily** : Déf :  $S'(\mathbb{R})$ , Thm/Déf : TF dans  $S'$ , Ex :  $\widehat{\delta_0}$  et  $\widehat{1}$ , Déf : support d'une distribution, Thm : Si  $T \in S'$  et  $S \in \mathcal{E}'$  on a  $T \star S \in S'$  et  $\widehat{T \star S} = \widehat{T} \widehat{S}$ , Thm : Si  $T \in S'$  et  $\varphi \in S$  alors  $T \star \varphi \in C^\infty \cap S'$  et  $\widehat{T \star \varphi} = \widehat{\varphi} \widehat{T}$ .

## III - Applications

### 1) Formule sommatoire de Poisson

↔ **Gourdon** : Thm : formule sommatoire de Poisson, App :  $\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}$  dans  $S'(\mathbb{R})$  (**Willem**).

### 2) Applications aux EDP

↔ **Laamri** : Équation de la chaleur, Équation des ondes.

### 3) Applications en probabilité

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : fonction caractéristique, Thm : Elle caractérise la loi, Ex : f.c de la loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et de  $\mathcal{E}(1)$ , Prop : Loi de la somme de 2 va indépendantes, Ex :  $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \star \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ , Prop :

$X \perp Y$  et  $X + Y \perp X - Y \Leftrightarrow X$  et  $Y$  gaussiennes (**Ouvrard 2**)

141.

- Beck, *Objectif agrégation* (pour I)
- El Haj Laamri, *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions* (presque tout)
- Rudin, *Analyse réelle et complexe* (pour II)
- Zuily, *Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles* (pour transfo de Fourier dans  $S$  et  $S'$ )
- Barbe, Ledoux, *Probabilités* (pour III.3)
- Gourdon, *Analyse* (Poisson)
- Willem, *Analyse harmonique réelle* (corollaire de Poisson)

**142. Rapport du Jury** : Cette leçon ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soignée des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. La formule d'inversion de Fourier pour une fonction  $L^1$  dont la transformée de Fourier est aussi  $L^1$  ainsi que les inégalités de Young sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace  $L^2$  par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier paraissent nécessaires. Les candidats solides peuvent aborder ici la résolution de l'équation de la chaleur, de Schrödinger pour des fonctions assez régulières, ou plus délicats la détermination des solutions élémentaires du Laplacien ou de l'opérateur  $k^2 - d^2/dx^2$ . La transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées trouve sa place ici mais est réservé aux candidats aguerris. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications par exemple dans la direction du théorème de Paley-Wiener.



## 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

143 144

Cadre : Soit  $X$  un ensemble et  $(E, d)$  un espace métrique de dimension finie.

### I - Convergence

#### 1) Suites de fonctions

↔ Déf : CV simple et uniforme, Prop : CV uniforme  $\Rightarrow$  CV simple, C-ex : de la réciproque, Prop : critère de Cauchy uniforme, App : la limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  de fct polynômes et une fct polynôme, Déf : norme infinie, Prop :  $f_n$  CV uniformément  $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , thm de Weierstrass

#### 2) Séries de fonctions

↔ Déf : CV simple et uniforme, C-ex : pour CV simple n'implique pas CV uniforme, Déf : convergence normale, Ex : CV normale  $\Rightarrow$  CV uniforme, C-ex de la réciproque.

#### 3) Continuité, dérivabilité

↔ Thm : continuité, Thm de Dini, Rq : les résultats restent vrais pour les séries de fct en étudiant  $(S_n)_n$ , Thm : dérivabilité, Rq : pour les séries de fct, Rq : pour les fct de classe  $C^p$ , Ex : exp est  $C^\infty$ .

### II - Intégrabilité

#### 1) Convergence dans un espace mesuré

↔ Déf : CV  $\mu$  presque partout, Déf : norme  $L^p$  et CV  $L^p$ , Ex : de CV  $L^p$  non  $\mu$  p-p, Cor : de Riesz-Fisher.

#### 2) Interverson limite et intégrale

↔ Thm : Beppo-Levi, Lemme de Fatou, App, Thm : CV  $L^p$ -dominée, cas plus simple sur un segment, C-ex.

#### 3) Interverson somme et intégrale

↔ Thm : inversion sur un segment, Thm : inversion pour des fct mesurables, Ex.

### III - Séries entières

1) ↔ Déf : série entière, Lemme d'Abel, Déf : RCV, Rq : pour  $|x| = R$ , Abel angulaire et Taubérien faible, Déf : DSE, Ex.

### IV - Séries de Fourier

1) Déf : coeff de Fourier et série de Fourier, Lemme : Riemann-Lebesgue, Egalité de Parseval, Thm : CV de la série de Fourier, Thm : CV normale de la série de Fourier, Ex : calcul de la somme des  $\frac{1}{n^2}$ , formule sommatoire de Poisson + cor

---

143.

- Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (surtout I & III) ou El Amrani, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*
- Brian et Pagès, *Théorie de l'intégration*, 5ème édition (pour II)
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, 2ème édition (pour les contre-exemples)

144. **Rapport du Jury** : Rien.

## 243- Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. 145 146

Cadre :

### I - Généralités

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ Déf : série entière, Prop : Lemme d'Abel, Déf : Rayon de convergence, Cor : si  $|z| < R$  CV et  $|z| > R$  DV, Ex : exp, Déf : disque ouvert de CV (CV normale sur compacts et DV en dehors), Rq : on ne peut rien dire sur le bord du disque.

#### 2) Calcul du rayon de convergence

↔ Prop : Critère de D'Alembert, Ex : exp et  $\sum n^\alpha z^n$ , Prop : Cauchy, Ex :  $a_n = 2^n$ , Rq : On ne peut pas toujours utiliser ces deux prop (ex :  $\sum_{n \geq 0} z^{2n}$ ), Prop : Hadamard, Ex :  $\sum_{n \geq 0} z^{2n}$ , Prop : Comparaison des rayons de convergence, Ex :  $a_n = \ln(1 + 1/n)$ .

#### 3) Opération sur les séries entières

↔ Déf : Somme, Déf : Produit de Cauchy, Prop : Rayon de CV de la somme et du produit, Rq : on ne peut rien dire de plus sur les rayons de CV de la somme et du produit.

### II - Propriétés de la somme sur le disque de convergence

#### 1) Continuité, dérivabilité, intégrabilité

↔ Thm : continuité, Thm : Dérivabilité, Cor : la série est  $C^\infty$ , Thm : holomorphe sur le disque ouvert de CV, Ex :  $\frac{1}{(1-x)^2}$ , Thm : intégrabilité : csq, Ex : calcul de la série de arctan avec sa dérivée.

#### 2) Analyticité

↔ Déf : fct DSE + fct analytique, C-ex :  $f(x) = e^{-1/x}$  si  $x > 0$  et 0 sinon, Thm : zéros isolés + csq, Formule de Cauchy, App : Thm de Liouville, C-ex :  $\sin$ .

### III - Comportement au bord du disque de convergence

1) ↔ Exemples et contre-exemple : qui diverge sur tout le cercle, qui converge sur tout le cercle, qui converge en certains points et pas d'autres, Thm d'Abel angulaire/taubérien faible

### IV - Applications aux équations différentielles

#### 1) Calcul de DSE via les équations différentielles

↔ Explication de la méthode, Ex, App au dénombrement : Nombres de Bell

#### 2) Résolution d'équations différentielles

↔ Principe (recherche de solutions DSE, identification avec fonctions usuelles) + exemple, Equation de Bessel

---

145.

- Xavier Gourdon, *Analyse*, 2ème édition (I, II + DVPT 1) ou ou El Amrani, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*
- Beck, *Objectif Agrégation*, 2ème édition (II).
- Xavier Merlin, *MethodiX Analyse* (pour exemples et IV).
- Bertrand Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, 2ème édition (III).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (DVPT 2).
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 4* (DVPT 3)

**146. Rapport du Jury** : Il est regrettable de voir beaucoup de candidats qui maîtrisent raisonnablement les classiques du comportement au bord du disque de convergence traiter cette leçon en faisant l'impasse sur la variable complexe. C'est se priver de beaux exemples d'applications et du théorème de composition, pénible à faire dans le cadre purement analytique et d'ailleurs très peu abordé.

## 244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples. 147 148

Cadre : On note  $\sum a_n z^n$  les séries entières et  $R$  le rayon de convergence

### I - Fonctions analytiques réelles

#### 1) Définitions et premières propriétés

$\leftrightarrow$  Déf : DSE au vois de  $a_0$ , Ex : sin, Prop : DSE  $\Rightarrow C^\infty$ , C-ex :  $|x|$ , Prop :  $f + g/fg/f'/g \circ f$ , Prop :  $f C^\infty$  tq  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  converge vers 0  $\Rightarrow f$  DSE en 0, C-ex :  $e^{-1/x}$  si  $x > 0$ .

#### 2) Analyticité

$\leftrightarrow$  Déf : analytique, Ex :  $1/P$  avec  $P$  poly ne s'annulant pas sur  $I$ , Prop :  $fg/f + g/f'/g \circ f$  analytiques, Ex : arctan, Fonctions analytiques et  $C^\infty$  : C-ex :  $e^{-1/x}$ , Thm de Borel.

#### 3) Théorèmes généraux sur les fonctions analytiques

$\leftrightarrow$  Taylor avec reste intégral, App : thm de Bernstein, Ex  $\tan(x)$ , Prop : si  $\exists x_0 \in I$  tq  $f^{(j)}(x_0) = 0$  pour tt  $j$  alors  $f = 0$ , C-ex :  $e^{-1/x}$ , Cor : si  $f = 0$  sur  $J \subset I$   $f = 0$  sur  $I$ , Thm des zéros isolés, Ex :  $\sin(\pi/z)$ , Rq : pas de fcts analytiques à support compact non identiquement nulle.

### II - Fonctions holomorphes, analyticité sur $\mathbb{C}$

#### 1) Définitions

$\leftrightarrow$  Déf : holomorphe en  $a + \text{holo}$ , Ex :  $e^z$ , C-ex :  $z \mapsto \bar{z}$ , Déf : analytique sur  $\mathbb{C}$ , Thm analytique  $\Rightarrow$  holo, Rq : analytique  $\Rightarrow C^\infty$ , Thm de Cauchy, App : analytique  $\Leftrightarrow$  holo, C-ex :  $(x, y) \mapsto x - y$  réelle analytique mais pas analytique sur  $\mathbb{C}$ .

#### 2) Propriétés

$\leftrightarrow$  Thm zéros isolés, Cor : si  $f(a) = g(a)$  admet un pt d'accumulation alors  $f = g$ , Ex : prolongement de gamma (PAS EN DVP), Déf : singularité effaçable et isolée, Ex, Thm : il existe  $g$  DSE tq  $\delta(z) = f(z) - g(\frac{1}{z-z_0})$  admette un prolongement holo en  $z_0$ , Déf : résidu, Thm des résidus, App.

#### 3) Analyticité réelle ou complexe

$\leftrightarrow$  Prop : si  $f$  réelle-analytique sur  $I$  alors elle se prolonge en fonction analytique sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant  $I$ .

### III - Problèmes de prolongement

1)  $\leftrightarrow$  Ex :  $\ln(1+z)$ , Déf : singularité essentielle, Thm : si  $f = \sum a_n z^n$  de  $R = 1$  alors  $f$  possède une singularité essentielle, thm Abel angulaire, Ex et C-ex, Taubérien faible

### IV - Applications aux équations différentielles

1)  $\leftrightarrow$  Méthode : DSE pour trouver des solutions particulières aux équations différentielles aux coefficients DSE, Ex : équation de Bessel, Méthode : utiliser les équations différentielles pour calculer une série, App : Nombre de Bell

147.

- Gourdon, *Analyse* (pour I, Abel angulaire et taubérien faible)
- Beck, *Objectif Agrégation* (pour II.3 plus quelques thms)
- Zuily-Queffelec, *Éléments d'analyse* (I.3 plus qqs thm)
- Pommelet, *Agrégation de mathématiques cours d'analyse* (II. III. IV)

148. **Rapport du Jury** : Pas de rapport :(

## 245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ . Exemples et applications. 149 150

Cadre :  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{C}$ .  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .  $P := \text{Re}f$ .  $Q := \text{Im}f$ . Identification de  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  pour les notions de différentiabilité.

Motivations : Notion bcp plus forte que la dérivation réelle (notamment avec l'analyticité).

### I - Généralités sur les fonctions holomorphes

#### 1) Définitions, propriétés élémentaires, exemples

↔ **Amar-Matheron** : Déf :  $\mathbb{C}$ -dériv, Déf : holo +  $\mathcal{H}(\Omega)$ , Ex :  $z \mapsto z$  est  $\mathbb{C}$ -dériv de dérivée 1, Prop : somme + produit + inverse et composée de fct  $\mathbb{C}$ -dériv est  $\mathbb{C}$ -dériv, Ex : une fct polynomiale ou une fct rationnelle sans pôles sont  $\mathbb{C}$ -dérivables.

↔ **Tauvel** : Déf : analytique, Ex :  $1/z$ , Prop : les dérivées d'une analy existent et sont analy, Cor : analy  $\Rightarrow$  holo, Ex : exp.

#### 2) Holomorphie et différentiabilité

↔ **Amar-Matheron** : Prop :  $f$   $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a \in \Omega \Leftrightarrow f$  diff en  $a$  et  $df(a)$  similitude directe (multip par un complexe fixé) ; alors  $df(a)$  est la multip par  $f'(a)$ , Cor : holo  $\Rightarrow$  diff, C-ex : réciproque fausse  $z \mapsto \bar{z}$   $\mathbb{R}$ -diff (car  $C^\infty$ ) mais non holo.

↔ **OA** : Thm : conditions de Cauchy-Riemann, Cor : si  $f$   $\mathbb{R}$ -diff comme  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  alors  $f$  holo  $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  (**Amar-Matheron**).

↔ **Tauvel** : Prop : si  $\Omega$  connexe et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  et  $f' = 0 \Rightarrow f$  constante, Prop : si  $\Omega$  connexe et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  alors  $f$  cste sur  $\Omega \Leftrightarrow \text{Re}(f)$  cste sur  $\Omega \Leftrightarrow \text{Im}(f)$  cste sur  $\Omega \Leftrightarrow |f|$  cste sur  $\Omega \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ , App : si  $\Omega$  connexe les  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tq  $\text{Re}f = (\text{Im}f)^2$  sont les  $z \mapsto \lambda^2 + i\lambda$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### II - Propriétés et théorèmes généraux sur les fonctions holomorphes

#### 1) Formules de Cauchy

↔ **Amar-Matheron** : Déf : chemin + lacet + int sur un chemin, Ex : si  $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$  pour  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$  alors  $\int_\gamma \frac{dz}{z} = i(\theta_1 - \theta_0)$ , Déf/Prop : indice d'un chemin + c'est un entier.

↔ **Tauvel** : Thm de Cauchy sur un convexe (intégrale nulle d'une fct holo), Formule de Cauchy sur un convexe, Cor : holo  $\Rightarrow$  infiniment  $\mathbb{C}$ -dériv ; En part, dérivée d'une holo est holo (**Amar-Matheron**), Cor : formule de Cauchy avec les dérivées, Cor : formule de la moyenne (**Amar-Matheron**).

#### 2) (+ Existence de primitives, Tauvel p.71)

#### 3) Analyticité et inégalité de Cauchy

↔ **Amar-Matheron** : Si  $f$  holo dans un disque ouvert alors  $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$  avec CVN sur les compacts de  $D$ , Donc holo  $\Rightarrow$  analy, Rq : le DSE de  $f$  en  $a \in \Omega$  est valable sur le plus grand disque centré en  $a$  inclus dans  $\Omega$  (**Tauvel** + dessin), Inégalité de Cauchy, App : thm de CV de Weierstrass, Ex :  $\zeta$  holo sur  $\{\text{Res} > 1\}$ .

#### 4) Conséquences de la représentation en série entière

↔ **Tauvel** : Principe du prolt analy, Cor : Thm des zéros isolés, Ex : si  $0 \in \Omega \nexists f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tq  $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n$  pour  $n$  assez grand, Thm de Liouville, Cor : thm de d'Alembert-Gauss, App : tte matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet au moins une vp (**Amar-Matheron**), Déf : prop de la moyenne, Thm : Principe du max local + global, C-ex : ça ne marche pas pour le min cf  $|\text{Id}|$  atteint son min sur  $D(0, 1)$  en  $z = 0$  (**OA**), App :  $D$  ouvert  $\subset \Omega$   $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  non cste,  $|f|$  cste sur  $\text{Fr}D \Rightarrow f$  a au moins un 0 dans  $D$ , App : Lem de Schwarz.

#### 5) Intégrales de fonctions holomorphes

↔ **Amar-Matheron** ou **OA** : Thm : int dépendant d'un paramètre holo, Ex : fct caract loi normale (**Nourdin**), App : Densité des poly orthogonaux

### III - Fonctions méromorphes

#### 1) Singularités et méromorphie

↔ **Tauvel** : Thm : dvpt en série de Laurent d'une fct holo sur une couronne, Rq : expr des coeff avec une int, Déf : résidu, Déf : singularité isolée + pôle (**Amar-Matheron**), Ex : DSL de  $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$  sur  $D(0, 1)$ , Déf : méro, Ex précédent, Prop : quotient de 2 holo  $\Rightarrow$  méro, Rq : on a aussi méro  $\Rightarrow$  quotient de 2 holo, Thm : série de fct méro, App : Prolongement méro de  $\Gamma$

#### 2) Théorème des résidus et applications

↔ **Tauvel** : Thm des résidus.

↔ **Amar-Matheron** : Ex :  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}$ , App : Formule des compléments

149.

- Amar-Matheron, *Analyse complexe* (pour presque tout)
- Tauvel, *Analyse complexe pour la licence* (pour presque tout)
- Beck, *Objectif agrégation* (pour qqs trucs, on peut s'en passer)
- Nourdin (pour un petit truc)

150. **Rapport du Jury** : Le titre a changé. Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation  $\int_\gamma f(z)dz$  a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le coeur de la leçon, il faut connaître la déf d'une fct méro (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète)!

## 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications. 151 152

Notation :  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

### I - Définitions et premières propriétés

#### 1) Définitions.

↔ **Amrani** : Déf : coeff de Fourier exponentiels et trigo, Déf : série de Fourier et somme de Fourier d'ordre N, Prop : relations entre les  $c_n$  et les  $a_n$  et  $b_n$ , Thm :  $f \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  si tous ses coeff de Fourier sont nuls alors  $f$  fct nulle, Prop : cas particuliers  $f$  paire ou impaire, Ex : calcul de  $a_n$  et  $b_n$ .

#### 2) Propriétés.

↔ **Amrani** : Prop :  $c_n(f\sigma) = c_{-n}(f)$ ,  $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ ,  $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$  et  $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$ , Ex : calcul des  $c_n$ , Prop :  $f$  continue  $C^1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  alors  $f'$  continue par morceaux  $2\pi$ -périodique et  $c_n(f') = inc_n(f)$ , Prop :  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  les coeff de Fourier tendent vers 0 qd  $n \rightarrow \infty$ , Prop :  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $C^{k-1}$  sur  $\mathbb{R}$  et  $C^k$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  alors  $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|^k})$ ,  $a_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$  et  $b_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$ , Thm : si une série trigo  $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{-n}e_{-n} + c_n e_n)$  est UCV sur  $\mathbb{R}$  et de somme  $f$  alors  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n$ .

#### 3) Convolution

↔ **Amrani** : Déf : produit de convolution, Prop :  $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g) / f * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)c_n(g)e^{int} / f * e_n = c_n(f)e_n$ , Déf : noyau de Dirichlet, Prop :  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  on a  $S_n(f) = f * D_n$ .

### II - Convergence.

#### 1) Convergence au sens de Cesaro.

↔ **OA** : Déf : somme de Cesaro et noyau de Fejer, Rq :  $K_n$  est une identité approchée, Prop :  $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N})c_n(f)e_n$ , Thm : de Fejer, App : densité des polynômes trigonométriques, App : si  $(c_n(f))_n = 0$  alors  $f = 0$  pp.

#### 2) Convergence de la série de Fourier.

↔ **OA** : Thm : convergence de  $S_N(f)$ , Thm : Dirichlet, Ex, Thm : CV normale de la série de Fourier d'une fct  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  sur  $[0, 2\pi]$  et continue sur  $\mathbb{R}$ , App (**Gourdon**), App :  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , App : Formule sommatoire de Poisson (**Gourdon**).

#### 3) Cadre $L^2$ .

↔ **Amrani** : Déf : produit scalaire, Rq :  $(e_n)$  famille orthonormée totale, Thm : formule de Parseval, Cor : si  $f \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$ , Ex :  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

↔ **FGN An4** : Equation de la chaleur

---

151.

- El Amrani, *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions* (pour presque tout)
- Beck, *Objectif agrégation* (pour cv au sens de cesaro et de la série de fourier)
- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 4* (Eq de la chaleur)
- Gourdon, *Analyse* (1 appli et formule sommatoire de Poisson)

**152. Rapport du Jury** : Les différents modes de convergence ( $L^2$ , Fejer, Dirichlet...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe  $C^1$  par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et  $C^1$  par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série de Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution des équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes dans le cadre de fonctions assez régulières peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon.

## 249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes. 153 154

Introduction : Pile ou face.

### I - Suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli

- 1) Loi de Bernoulli  
↔ Déf d'une va de Bernoulli, espérance, variance, fonction caractéristique.
- 2) Indépendance  
↔ Déf : événements indépendants, Ex, Rq + C-ex : l'indépendance n'est pas équivalente à l'indépendance 2 à 2, Déf : variables aléatoires indépendantes.
- 3) Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.  
↔ Intro de **Ouvrard 2 p.54**, Déf : dvpt dyadique, Rq : sur l'unicité, Prop : pour construire  $b(\frac{1}{2})$ .

### II - Lois associées à des variables aléatoires de Bernoulli

- 1) Loi binomiale  
↔ Déf : loi binomiale, espérance, variance, Prop :  $\sum X_i \sim B(n, p)$  si  $X_i$  iid  $b(p)$ , Rq : loi binomiale c'est la loi du nb de succès dans  $n$  épreuves de Bernoulli, App : Weierstrass par les polynômes de Bernstein
- 2) Loi géométrique et loi binomiale négative  
↔ Déf : loi géométrique, espérance, variance, Rq : loi géométrique c'est la loi du nb d'épreuves nécessaires pour obtenir un succès, Déf : loi binomiale négative, Prop : qui lie  $b(p)$ ,  $\mathcal{G}(p)$  et  $B^-(n, p)$ .
- 3) Loi de Poisson  
↔ Déf : loi de Poisson, espérance, variance, thm des évènements rares de Poisson
- 4) Loi uniforme  
↔ Construction d'une  $\mathcal{U}[0, 1]$  :  $X_i \simeq b(\frac{1}{2})$  iid  $\Rightarrow \sum \frac{X_i}{2^i} \simeq \mathcal{U}[0, 1]$  (**Barbe Ledoux**)

### III - Applications

- 1) Convergence  
↔ LGN faible, Thm de Bernoulli, TCL, App : intervalle de confiance asymptotique.
- 2) Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$   
↔ Déf : chaîne de Markov, Ex : marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , plus quelques autres petits trucs dans **Barbe Ledoux**
- 3) Ruine du joueur  
↔ Problème de la Ruine du joueur

---

153.

- Ouvrard, *Probabilités 1* (pour I-1 & II)
- Ouvrard, *Probabilités 2* (pour I-2, DVPT 1 & DVPT 2)
- Philippe Barbe et Michel Ledoux, *Probabilité* (pour III-1-3)

154. **Rapport du Jury** : La notion d'indépendance ainsi que les théorèmes de convergence (LGN, TCL) doivent être rappelés. Il peut être intéressant de donner une construction explicite d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. Certains candidats plus aguerris pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli), ou donner des inégalités de grandes déviations (comme l'inégalité de Hoeffding).

## 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse. 155 156

Cadre :

### I - Convexité et premières conséquences

#### 1) Ensembles convexes

↔ Déf : segment + partie convexe, Ex : intervalles de  $\mathbb{R}$  et boule unité dans evn, Déf : enveloppe convexe, Thm carathéodory, App : si  $E$  evn de dim finie et  $A$  partie compacte de  $E$  alors  $Conv(A)$  compacte.

#### 2) Fonctions convexes et régularité

↔ Déf : fct convexe sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , Rq : encore vraie si  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , Rq : déf stricte convexité, Prop :  $f$  convexe  $\Leftrightarrow$  épigraphe de  $f$  convexe, Prop :  $f$  convexe  $\Leftrightarrow \forall x_0, g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est croissante, Csq : inégalité entre les taux de variation, Prop : continuité d'une fonction convexe sur l'intérieur de  $I$ , C-ex :  $\mathbf{1}_{\{0,1\}}$  sur  $[0,1]$  est convexe non continue, Prop : si  $f$  dérivable alors  $f$  convexe  $\Leftrightarrow f'$  croissante  $\Leftrightarrow$  courbe de  $f$  au dessus de ses tangentes, Prop : si  $f$  deux fois dérivable alors  $f$  convexe  $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ , Prop : si  $f$  convexe alors  $f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$ , Ex :  $x^2, exp(x), -\log(x)$  sont convexes, App : si  $f$  convexe et majorée sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  constante, C-ex :  $\frac{1}{1+x}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , Prop : si  $f$  continue et  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$  alors  $f$  convexe (partie à résumer un petit peu...)

### II - Inégalités

#### 1) Inégalités classiques

↔  $e^x \geq x + 1, e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}, u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v, \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \left[ \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x \right]$ , Prop : deux inégalités de Jensen + inégalité arithmético-géométrique.

#### 2) Inégalités dans les $L^p$

↔ Inégalité de Hölder, App : qd mesure finie  $p > q \Rightarrow L^p \subset L^q$ , Inégalité de Minkowski, App : les  $L^p$  sont des evn.

#### 3) Inégalités en probabilités

↔ Inégalité de Hoeffding, App : construction d'intervalles de confiance.

### III - Optimisation

#### 1) Fonctions convexes et extremum

↔ Prop :  $f$  différentiable convexe sur  $U$  ouvert convexe  $\Leftrightarrow f(y) - f(x) \geq Df(x)(y-x)$ , Prop :  $f$  deux fois différentiable convexe sur  $U \Leftrightarrow D^2 f(x)(h,h) \geq 0$ , Prop : si  $f$  convexe sur  $U$ , différentiable en  $a$  et  $Df(a) = 0$  alors  $f$  admet en  $a$  un minimum global, Prop : unicité du minimum, ellipsoïde de John Loewner

#### 2) Optimisation numérique

↔ Méthode de Newton, Inégalité de Kantorovitch, Méthode du gradient à pas optimal

#### 3) Théorème de projection

↔ Thm : projection sur un convexe fermé, Déf : coercive, (Thm : Stampacchia)

---

155.

- Gourdon, *Analyse* 2ème édition (pour I-1-2).
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle* (pour I-2 il y a les définitions plus générales dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  II-1).
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation* 2ème édition (pour unicité du min dans III-1).
- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* 3ème édition (pour III-1 et méthode de Newton).
- Cadre, Vial, *Statistique mathématique* (pour II-3).
- Brézis, *Analyse fonctionnelle* (pour I-3, II-2 et Stampacchia).

156. **Rapport du Jury** : Rien



## 254 - Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . 157 158

### I - Espace de Schwartz et distributions tempérées

#### 1) Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

↔ **Zuily** : Déf :  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  (noté  $\mathcal{S}$ ), Prop : muni des semi-normes  $\mathcal{S}$  est un ev métrisable complet, Ex :  $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$  et  $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ , Déf :  $O_\Pi(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty \text{ tq } \exists k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha, |\partial^\alpha f(\xi)| \leq C_\alpha(1 + |\xi|)^k, \forall \xi \in \mathbb{R}^d\}$ , Prop :  $f \in O_\Pi(\mathbb{R}^d)$  alors  $u \mapsto fu$  et  $u \mapsto \partial^\alpha u$  sont continues de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}$  stable par produit de convolution, Prop :  $C_c^\infty$  dense dans  $\mathcal{S}$ , Prop :  $\mathcal{S}$  dense dans  $L^p$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

#### 2) Distributions tempérées

↔ **Zuily** : Déf :  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  (noté  $\mathcal{S}'$ ), Prop :  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathcal{S} \subset L^p \subset \mathcal{S}'$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , Ex :  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable et tq  $|f(x)| \leq |P(x)|$  où  $P$  est un polynôme alors  $f \in \mathcal{S}' / \delta_0 \in \mathcal{S}'$ , Ex :  $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'$ , C-ex :  $e^{\varepsilon|x|} \notin \mathcal{S}'$ , Déf : convergence des suites dans  $\mathcal{S}'$ , Déf : support, Ex :  $\text{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$  et  $\text{supp}\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathbb{R}$ , Prop :  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ .

#### 3) Opérations sur les distributions tempérées

↔ **Zuily** : Prop :  $fT \in \mathcal{S}'$  si  $f \in O_\Pi(\mathbb{R}^d)$  et  $T \in \mathcal{S}'$ , Ex :  $xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta_0$ , Thm/Déf : dérivée d'une distributions tempérée, Ex :  $Pf(1/x^2) = -\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$  (**Zuily exos**) /  $H' = \delta_0 / T' = 0 \Leftrightarrow T = cste$ , Prop : suite de distrib tempérées qui converge  $\Rightarrow$  dérivées qui convergent, Prop : formule de Leibniz, Prop/Déf :  $T * S$  où  $T \in \mathcal{S}'$  et  $S \in \mathcal{E}'$ , Prop du produit de convolution : commutativité + élt neutre + dérivation, Prop/Déf :  $T * \varphi$  où  $T \in \mathcal{S}'$  et  $\varphi \in \mathcal{S} + \text{supp}$  de  $T * \varphi$ , C-ex à l'associativité.

### II - Transformation de Fourier

#### 1) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

↔ **Zuily** : Déf : transformée de Fourier dans  $\mathcal{S}$ , Ex : gaussienne, Thm : transfo de Fourier=appli linéaire bijective bicontinue de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ , Propriétés de la transformée de Fourier dans  $\mathcal{S}$ , Thm :  $\boxed{\text{Formule sommatoire de Poisson}}$  (**Gourdon**).

#### 2) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

↔ **Zuily** : Thm/Déf : transformée de Fourier dans  $\mathcal{S}'$ , Thm : transfo de Fourier=appli linéaire bijective bicontinue de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}'$ , Propriétés de la transformée de Fourier dans  $\mathcal{S}'$ , Ex :  $\boxed{\text{transformée de Fourier de } vp\left(\frac{1}{x}\right)}$  /  $\mathcal{F}\delta_0 = 1 / \mathcal{F}1 = (2\pi)^d$ , App :  $\boxed{\text{Corollaire formule sommatoire de Poisson : } \delta_{\mathbb{Z}} = \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}}$

### III - Applications aux équations aux dérivées partielles

#### 1) Equation de la chaleur

↔ **Bony** : Equation de la chaleur et méthode de résolution via la transformée de Fourier.

#### 2) Equation de Laplace

↔ **Bony** : Equation de Laplace  $\Delta u = 0$  et méthode de résolution, Thm : les solutions sont des polynômes, Cor : Soit  $f$  harmonique sur  $\mathbb{R}^d$  alors  $(f \text{ majorée}) \Rightarrow (f \text{ polynômiale}) / (f \text{ bornée}) \Rightarrow (f \text{ constante}) / (f \text{ tend vers } 0 \text{ à l'infini}) \Rightarrow (f \text{ nulle})$ .

157.

- Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles* (pour presque tout)
- Jean-Michel Bony, *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*. (pour III)
- Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles. Exercices corrigés*. (pour un exemple)
- Gourdon, *Analyse* (pour formule sommatoire de Poisson)

**158. Rapport du Jury** : Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Par contre, on attend du candidat qu'il sache faire le lien entre décroissance de la transformée de Fourier et régularité de la fonction. Le fait que la transformée de Fourier envoie  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dans lui-même avec des bonnes estimations des semi-normes doit être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Le passage à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  repose sur l'idée de dualité qui est le cœur de cette leçon. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être donnés, classiques comme la gaussienne ou  $(1+x^2)^{-1}$  et d'autres liés à la théorie des distributions comme la détermination de la transformée de Fourier d'une constante. Les candidats ayant une bonne connaissance du sujet peuvent par exemple déterminer la transformée de Fourier de la valeur principale, la solution fondamentale du Laplacien, voire résoudre l'équation de la chaleur ou de Schrödinger.

# 255 - Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions. 159 160

Cadre : On définit  $D(\Omega)$  et la topologie avec les semi-normes.

## I - Introduction aux distributions

### 1) Premières définitions

$\leftrightarrow$  Déf d'une distribution, Ex : mesure de Dirac +  $\boxed{vp(\frac{1}{x})}$  +  $T_f$  avec  $f \in L^1_{loc}$ , Déf : ordre d'une distrib, Ex : Dirac d'ordre 0 +  $\boxed{vp(\frac{1}{x})}$  d'ordre 1 +  $T_f$  d'ordre 0, Déf : support d'une distrib, Rq : c'est un fermé, Ex : support du Dirac + si  $f$  est continue alors  $\text{supp}T_f = \text{supp}f$ , Prop :  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  si  $\text{supp}T \cap \text{supp}\varphi = \emptyset$ , Prop :  $T$  distribution d'ordre  $k$  et  $\varphi \in C_0^k$  telle que  $\partial^\alpha \varphi(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $\text{supp}T$  alors  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ , Thm : une distrib de support  $\{x_0\}$  est combinaison linéaire des dérivées du Dirac en 0 (à écrire sans les Dirac pour le moment), Déf : convergence de distrib.

### 2) Multiplication par une fonction $C^\infty$

$\leftrightarrow$  Déf : multiplication d'une distrib par une fonction  $C^\infty$ , Ex :  $\boxed{xvp(\frac{1}{x}) = 1}$ , Prop :  $\text{supp}(aT) \subset \text{supp}T \cap \text{supp}(a)$ , App :  $(xT = 0) \Leftrightarrow (T = c\delta_0)$ .

## II - Dérivation au sens des distributions

### 1) Définition

$\leftrightarrow$  Déf : dérivée d'une distrib, Rq : sur l'ordre de la dérivée, Prop :  $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ , Rq : sur le support de  $\partial^\alpha T$ , Ex : fonction d'Heaviside  $H$  + Dirac, Prop : formule des sauts.

### 2) Primitives de distributions

$\leftrightarrow$  Thm :  $u' = 0 \Leftrightarrow u = c^{ste}$ , existence de primitive, Ex :  $\boxed{\text{Si } f(x) = \log(|x|) \text{ alors } f' = vp(\frac{1}{x})}$  +  $T' + aT = f$ .

### 3) Dérivée d'un produit

$\leftrightarrow$  Prop : dérivée de  $fT$ , Ex :  $(xH)'$ , Prop : formule de Leibnitz.

### 4) Dérivation et convolution

$\leftrightarrow$  Déf :  $\varepsilon'$ , Déf : convolution de deux distrib, Prop : sur la convolution d'une distrib et d'une fonction test, Prop : sur la convolution de deux distributions, C-ex :  $(1 * \delta'_0) * H \neq 1 * (\delta'_0 * H)$ .

## III - Distributions et espaces de Schwartz

### 1) Espace de Schwarz $S(\mathbb{R}^n)$

$\leftrightarrow$  Déf :  $S(\mathbb{R}^n)$  et des semi-normes qui le rendent complet, Ex :  $D(\mathbb{R}^n) \subset S + e^{-|x|^2} \in S$ , Prop :  $S$  est stable par multiplication/convolution/dérivation, Prop :  $D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $S$ , Prop :  $S \subset L^p$  pour tout  $p$ , Déf : transformée de Fourier dans  $S$ , Ex : si  $u(x) = e^{-\pi|x|^2}$  alors  $\mathcal{F}u = u$ , Thm :  $\mathcal{F}$  est une appli lin bicontinue de  $S$  dans  $S$ , Prop : propriétés de  $\mathcal{F}$ .

### 2) Espace des distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^n)$

$\leftrightarrow$  Déf :  $S'$ , Rq :  $S' \subset D' + \varepsilon' \subset S'$ , Ex : si  $f$  est mesurable et majorée par un polynome alors  $f \in S'$ , Prop : la dérivée et la multiplication par  $x$  laisse stable  $S'$ , Prop :  $L^p \subset S'$  pour tout  $p$ , Déf : transformée de Fourier sur  $S'$ , Thm : c'est une appli lin bijective bicontinue, Ex :  $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ ,  $\mathcal{F}1 = \delta_0$ , Thm :  $\boxed{\text{Formule sommatoire de Poisson et son corollaire}}$ , App : résolution équation de la chaleur.

## IV - (+ Application : espaces de Sobolev)

1) Déf : espaces de Sobolev, Thm : déf du produit scalaire qui en fait des Hilbert, Thm :  $D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^m$ .

---

159.

- Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles* (pour presque tout)
- Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier* (pour primitives, formule de Leibnitz, et Sobolev)
- Willem, *Analyse harmonique réelle* (pour la transformée de Fourier et le corollaire de la formule sommatoire de Poisson)

**160. Rapport du Jury** Les attentes du jury restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue.

Le passage à  $S'(\mathbb{R}^d)$  repose sur l'idée de dualité qui est le coeur de cette leçon. La détermination de la dérivée de  $\log|x|$ , de la dérivée seconde fournit un exemple pertinent tout comme la formule des sauts.

# 260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

161 162

## I - Espérance

### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : espérance, Rq : c'est la valeur moyenne de la va, Ex : espérance d'une constante, Thm : de transfert, Rq : l'espérance est linéaire, Ex :  $\mathbb{E}[1_A(X)] = \mathbb{P}(X \in A)$ , Prop : espérance de  $\varphi \circ h$ , Thm : inégalité de Jensen, Thm : inégalité de Markov, Déf : espérance d'un vecteur, Thm : indépendance d'une famille de va  $\Leftrightarrow \mathbb{E}[\prod_J \varphi_i(X_i)] = \prod_J \mathbb{E}[\varphi_i(X_i)]$ , Cas particulier : Si  $X_1, \dots, X_n$  va indép alors  $\mathbb{E}[X_1 \dots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \dots \mathbb{E}[X_n]$ .

### 2) Espérances des lois usuelles

↔ **Ouvrard 1** : Prop : espérance dans le cas de va discrète, Ex : espérance de Bernoulli/géométrique/binomiale/Poisson/loi uniforme sur un ensemble discret, Prop : espérance dans le cas de va à densité, Ex : loi uniforme sur segment/loi normale/loi exponentielle. C-ex : la loi de Cauchy n'a pas d'espérance.

### 3) Espérance conditionnelle

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf/Prop : espérance conditionnelle, Prop : elle est linéaire positive, Prop :  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X]$  / si  $\mathcal{B}$  est indépendante de  $\sigma(X)$  alors  $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X]$  / si  $Y$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et  $XY$  est intégrable alors  $\mathbb{E}[XY|\mathcal{B}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ , Ex : Si  $X_1 \sim B(n_1, p)$  et  $X_2 \sim B(n_2, p)$  indép alors  $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2] = \frac{n_1(X_1 + X_2)}{n_1 + n_2}$ , Ex : si  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$  et  $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$  indép alors  $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2] = \frac{\lambda_1(X_1 + X_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$  (**Cottrell**).

## II - Moments d'une variable aléatoire

Déf : moment d'ordre p (**Barbe-Ledoux**)

### 1) Moments d'ordre 2 : variance et covariance

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : variance et écart-type, Prop : c'est la distance de X à son espérance dans  $L^2$ , Prop :  $var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ , Ex : si  $var(X) = 0$  alors X constante ps et égale à sa valeur moyenne, Ex : si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  alors  $var(X) = 1$ , Prop :  $var(X + a) = var(X)$  et  $var(aX) = a^2 var(X)$ , Prop : inégalité de Tchebychev, Prop : Cauchy-Schwarz, App : **Weierstrass** (**ZQ**), Déf : covariance, Ex : Soit X, Y va réelles tq  $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$  alors  $cov(X, Y) = 0$ .

### 2) Lien avec l'indépendance

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : va non-corrélées, Ex : les va indép sont non-corrélées, C-ex : pas de réciproque : si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y = X^2$  alors X et Y sont non-corrélées mais pas indép, Thm : la réciproque est vraie pour les vecteurs gaussiens, Prop : si  $X_1, \dots, X_n$  non-corrélées alors  $var(\sum X_i) = \sum var(X_i)$ , Ex : Si  $X \sim B(n, p)$  alors  $var(X) = np(1-p)$ .

### 3) Moments d'ordre p

↔ **Barbe-Ledoux** : Thm : Hölder, Prop : L'appli  $p \rightarrow (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$  est croissante, Prop : si  $1 \leq p \leq q$  alors  $L^q \subset L^p$  (**Cottrell**), App : CV  $L^q \Rightarrow CV L^p$  (**Cottrell**), Prop : Si X va réelle positive alors  $\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt$ .

## III - Utilisation des moments

### 1) Fonctions génératrices

↔ **Ouvrard 1** : Dans cette ss-partie X va à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , Déf/Prop : fonction génératrice  $G_X$  de X, Prop :  $G_X(1) = 1$  / régularité de  $G_X$  /  $G_X(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n s^n$  / caractérise la loi, Ex : fonction génératrice  $Ber(p)/\mathcal{P}(\lambda)$ , Prop : Si X et Y indépendantes alors  $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ , App : fonction génératrice d'une binomiale, Prop : X a un moment d'ordre p  $\Leftrightarrow G_X$  est r fois dérivable à gauche en 1, Prop : **Galton-Watson** (**Cottrell**).

### 2) Fonction caractéristique (et transformée de Laplace)

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : fonction caractéristique, Thm : la fonction caractéristique caractérise la loi, Ex : fonction carac de  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{E}(1)$ , Thm : relation entre dérivées de la fonction caractéristique et moments, App : une loi n'est pas caractérisé par ses moments mais elle l'est si  $\varphi_X$  est analytique, Thm : des moments, C-ex : 2 lois ayant les mêmes moments, ( Déf : transfo de Laplace, App : **Hoeffding** (**Cadre**), Prop : si  $L_X$  bien définie sur voisinage de 0 elle est analytique )

### 3) Convergence

↔ **Barbe-Ledoux** : Thm : LGN faible, App : la moyenne empirique est un estimateur consistant de la moyenne (**Cadre**), Thm : Lévy, Thm : **TCL**, App : intervalle de confiance pour des lois de Bernoulli.

161.

- Barbe-Ledoux, *Probabilité* (pour un peu tout)
- Ouvrard, *Probabilités 1* (pour I.2, III.1)
- Cottrell, *Exercices de probabilité* (pour ex d'espérance conditionnelle et relation des  $L^p$ )
- Zuily, Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour Weierstrass)
- Cadre, *Statistique mathématique* (Hoeffding, consistance de moyenne empirique)

162. **Rapport du Jury** : Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebichev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème limite central). Le comportement des moyennes de Cesàro pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

# 261 - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications. 163 164

Cadre :

## I - Définitions et premières propriétés

### 1) Fonction caractéristique

↔ Déf : fonction caractéristique (f.c) sur  $\mathbb{R}^d$ , Rq : elle est définie partout, Expression pour une va de loi discrète ou à densité, Ex : pour des lois usuelles et pour un vecteur gaussien, Prop élémentaires, Thm : la f.c caractérise la loi, Thm : formule d'inversion de Fourier, App : calcul de la f.c d'une Cauchy à partir de la f.c d'une loi de Laplace.

### 2) Transformée de Laplace

↔ Déf : transformée de Laplace, Ex : pour des lois usuelles, Rq : toujours définie en 0 mais pas forcément partout, Prop élémentaires (si  $X$  bornée, si  $X$  à valeurs positives ...), Thm : La transformée de Laplace caractérise la loi, App : Etude de la loi Gamma.

## II - Moments et indépendance

### 1) Moments

↔ Prop : implications entre la dérivabilité de la f.c et l'existence de moments, Ex : calcul de la f.c d'une loi normale en dérivant sous l'intégrale, Rq : les moments ne caractérisent pas la loi, Ex : avec  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Z = e^X$  et  $Z_a$  de densité  $f_{Z_a}(x) = f_Z(x)(1 + a \sin(2\pi \ln(x)))$ , Cor : si la f.c de  $X$  est analytique alors la loi est caractérisée par les moments, Prop : si la transformée de Laplace est définie sur un voisinage de 0 alors elle est analytique + expression en fonction des moments.

### 2) Indépendance

↔ Prop :  $X \perp Y \Leftrightarrow \varphi_{(X,Y)}(t, s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$ , App :  $X \perp Y \Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$  pour un vecteur gaussien, Prop :  $X \perp Y \Leftrightarrow \varphi_{(X,Y)}(t, s) = \varphi_{(X,Y)}(t, 0)\varphi_{(X,Y)}(0, s)$ , Ex, Thm :  $X \perp Y \Rightarrow \varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ , C-ex : avec la loi de Cauchy, Ex : calcul de la f.c d'une binomiale, Ex : la somme de lois normales indépendantes est une loi normale, Mêmes théorèmes pour la transformée de Laplace, App : inégalité de Hoeffding, C-ex pour la transformée de Laplace : 2 va pas indépendantes mais tq le transformée de Laplace de la somme est le produit des transformées de Laplace, Ex : calcul de la transformée de Laplace d'une binomiale, App : Loi composée : calcul de la loi de  $Z = \sum_{i=1}^N X_i$  pour  $(X_i)$  iid de loi  $b(p)$  et  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

## III - Convergence en loi

### 1) Définition et caractérisation

↔ Déf : équivalences de la convergence en loi avec la fonction de répartition et avec  $\mathbb{E}[g(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[g(X)]$  pour  $g$  continue bornée, Thm : de Levy (version faible), App : LGN faible, App : théorème de Poisson, Ex : convergence de  $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ , Thm : équivalence entre la convergence en loi et la convergence des transformées de Laplace.

### 2) Théorème central limite

↔ Thm : TCL, App : détermination d'intervalles de confiance, App : Formule de Stirling.

---

163.

- Foata, Fuchs, *Calcul des probabilités*, 2ème édition (pour I & II-2).
- Barbe, Ledoux, *Probabilité* (pour I-1, II-2 & III).
- Ouvrard, *Probabilités 2*, 3ème édition (pour II & Thm de Poisson).
- Cottrel, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre, *Exercices de probabilités* (pour des exemples).

**164. Rapport du Jury** : Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy et son utilisation dans la démonstration du TCL. Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Enfin, la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

## 262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications. 165 166

**Cadre** :  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $X$  désignent resp. une suite de v.a et une v.a définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

### I - Convergence presque sûre et convergence en probabilité

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : CV presque sûre (p.s), Rq : déf équivalentes, Ex :  $U_n = \sum_{i=1}^n 2^{-i} X_i$  où  $X_i \sim b(p)$  iid, Thm : Borel-Cantelli, Cor : une caractérisation de la CV p.s, Ex :  $X_i \sim \varepsilon(1)$  iid et  $M_n = \max(X_i)$  alors  $\frac{M_n}{\ln n} \xrightarrow{p.s} 1$ , C-ex : avec  $X_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}[}$  et  $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$  on a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = +\infty$  mais  $X_n \xrightarrow{p.s} 0$  (**Ouv 2**), Déf : CV en proba, Prop : CV p.s  $\Rightarrow$  CV en proba, C-ex : réciproque fautive avec  $\frac{1}{n} \delta_1 + (1 - \frac{1}{n}) \delta_0$  (**Ouv 2**), Lem :  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow d(X_n, X) \rightarrow 0$  où  $d(X, Y) = \mathbb{E}[\min(|X - Y|, 1)]$ , Thm :  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow$  de tte suite d'entiers croissants on peut extraire un ss-suite  $(n_k)$  tq  $X_{n_k} \xrightarrow{p.s} X$ , Rq : CV p.s non métrisable, Prop : CV en proba stable par tte fct continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , Thm : critère de Cauchy en proba.

#### 2) Loi des grands nombres et applications

↔ **Barbe-Ledoux** : Thm : LGN faible, Thm : LGN forte, App : Méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales (**Ouv 2**), App : construction d'estimateurs par la méthode des moments (**Rivoirard ou Cadre**), App : Glivenko-Cantelli (**Ouv 2**).

### II - Convergence en norme $L^p$ , $p \geq 1$

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Barbe-Ledoux** : Rappel :  $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \|\cdot\|_p)$  est un Banach, Déf : CV  $L^p$ , Rq : si  $1 \leq p \leq q$  alors CV  $L^q \Rightarrow$  CV  $L^p$  (**Cottrell**), Prop : CV  $L^p \Rightarrow$  CV en proba, 2 c-ex, Prop :  $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow \exists$  une ss-suite  $(n_k)$  tq  $X_{n_k} \xrightarrow{p.s} X$  (**Cottrell**), Déf : famille UI, Ex : si  $|X_i| \leq Y$  p.s et  $Y$  intégrable alors  $(X_i)$  UI, Thm : Vitali (**Ouv 2**).

#### 2) Le cas des martingales

↔ **Ouv 2** : Déf : martingale, Thm : une martingale bornée dans  $L^2$  CV p.s et dans  $L^2$ , Thm : Soit  $(X_n)$  une martingale intégrable alors  $((X_n))$  UI  $\Leftrightarrow X_n$  est fermable ie :  $X_n = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_n]$  et dans ce cas  $X_n$  CV p.s et dans  $L^1$ , Thm d'arrêt, App : Ruine du joueur

### III - Convergence en loi

#### 1) Définitions et premiers théorèmes

↔ **Barbe-Ledoux** : Déf : CV en loi, Prop : CV en proba  $\Rightarrow$  CV en loi, C-ex : réciproque fautive avec  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$  il y a CV en loi mais ni CV p.s ni CV en proba, Prop :  $X_n \xrightarrow{L} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ , Thm :  $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow$  (pour tte fct bornée  $\Phi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  on a  $\mathbb{E}[\Phi(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[\Phi(X)]$ ), Thm de Lévy, App : Thm des évènements rares de Poisson, Thm : TCL

↔ **Ouv 2** : Prop : continuous mapping theorem.

#### 2) Applications en statistique

↔ **Rivoirard ou Cadre** : Lemme : Slutsky, App : delta méthode, App : construction d'intervalles de confiance asymptotiques.

165.

- Barbe, Ledoux, *Probabilité* (pour presque tout)
- Ouvrard, *Probabilités 2* (pour Vitali, martingales, quelques exemples et développements)
- Rivoirard, Stoltz, *Statistique mathématique en action* (pour delta méthode + appli de stats)
- Cottrell, *Exercices de probabilités* (pour le diagramme des liens entre les convergences)
- Cadre, Vial, *Statistique mathématique* (pour delta méthode + appli de stats)
- Zuilly Queffelec, *Analyse pour l'agrégation* (pour TCL)

**166. Rapport du Jury** : Les implications entre les divers modes de convergence ainsi que les réciproques partielles doivent être connus. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème limite central) doivent être énoncés. Les candidats plus aguerris pourront présenter le lemme de Slutsky (et son utilisation pour la construction d'intervalles de confiance), ou bien certains théorèmes de convergence pour les martingales.

## 263 - Variables à densités. Exemples et applications. 167 168

Cadre : Les va sont définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$

### I - Variables aléatoires à densité

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Ouvrard 1 & 2** : Thm : Radon-Nykodym, Déf : va à densité (se placer dans le cadre Lebesgue intégrable), Rq :  $f_X$  détermine la loi de  $X$ , Déf : espérance et variance pour les va à densité, Déf : fonction de répartition, Prop : sur la fonction de répartition.

#### 2) Loi usuelles

↔ **Ouvrard 2** : Loi uniforme, App : simulation de n'importe quelle loi avec la fonction pseudo-invers de  $F_X$ , Loi normale, Ex : modéliser la répartition des notes dans une classe, Loi exponentielle, Ex : modélise des durées de vies car sans mémoire, Loi Gamma, Loi du chi-deux, Rq : loi du chi-deux = loi de sommes de carrés de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

#### 3) Opérations sur les densités

↔ **Ouvrard 1** : Prop : densité des marginales de  $X = (X_1, X_2)$  de densité  $f_X$ , Ex :  $f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}}$ , Prop : densité de  $Y = g(X)$  quand  $X$  est à densité et  $g$  strictement monotone et dérivable.

↔ **Ouvrard 2** : Prop : critère d'indépendance en terme de densités, App :  $S \sim \mathcal{E}(1/2)$  et  $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$  alors  $\sqrt{S} \cos(\Theta)$  et  $\sqrt{S} \sin(\Theta)$  sont iid de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , Prop : loi de la somme de 2 va iid = produit de convolution des lois + cas à densité, App : somme de  $n$  expo indép = gamma.

#### 4) Fonction caractéristique et densité

↔ **Ouvrard 2** : Déf : fonction caractéristique, Rq : lorsque  $X$  est à densité il s'agit de la transfo de Fourier de  $f_X$ , Thm : la fonction caractéristique caractérise la loi, Ex : fct caractéristique d'une loi normale et loi expo, Prop :  $X$  une va tq  $\varphi_X$  soit Lebesgue intégrable alors  $X$  a une densité + expression de la densité, Prop : critère d'indépendance en terme de fct caractéristiques, Ex :  $X_1, X_2$  iid de loi de Laplace alors  $X_1 - X_2$  et  $X_1 + X_2$  ont même fct caractéristique mais ne sont pas indépendantes.

### II - Vecteurs gaussiens

#### 1) Définitions et premières propriétés

↔ **Cadre** : Déf : vecteur gaussien + matrice de covariance + densité, Thm :  $X$  et  $Y$  iid tq  $X + Y \perp X - Y$  alors  $X$  et  $Y$  va gaussiennes, caractérisation de l'indépendance pour les vecteurs gaussiens.

#### 2) Projection de vecteurs gaussiens

↔ **Cadre** : Thm : Cochran, App :  $\bar{X}_n \perp S_n^2$  et  $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .

### III - Utilisation des lois à densité en statistiques

#### 1) Maximum de vraisemblance

↔ **Cadre** : Déf : vraisemblance + précision dans le cas à densité, Prop :  $\forall \theta \in \Theta L_n(\cdot; \theta) > 0 \mathbb{P}_\theta - p.s.$ , Ex : vraisemblance d'un  $n$ -échantillon gaussien, Déf : EMV, Rq : en pratique on maximise la log-vraisemblance, App : EMV du paramètre  $\theta$  pour un  $n$ -échantillon iid de loi  $\mathcal{U}[0, \theta]$

#### 2) Théorème central limite

↔ **Cadre** : TCL + appli intervalle de confiance

167.

- Ouvrard, *Probabilités 1* (pour I-1-3)
- Ouvrard, *Probabilités 2* (pour I-2-3-4)
- Cadre, *Statistique mathématique* (pour II & III)

168. **Rapport du Jury** : Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que les lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre l'indépendance et la convolution pourra être étudié. Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$  et l'intérêt de ce résultat pour la simulation informatique. Pour aller plus loin, certains candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème limite central.

## 264 - Variables aléatoires discrètes. 169 170

### I - Premières propriétés et exemples

- 1) Variables aléatoires discrètes, loi de probabilité  
↔ **Ouvrard 1** : Déf : variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E(\text{vad})$ , Rq : souvent  $E = \mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n$ , Prop/déf : loi de probabilité d'une vad, Ex : lancer de 6 dés discernables.
- 2) Loïs usuelles  
↔ **Ouvrard 1** : Loi de Bernoulli, Ex :  $b(1/2)$  représente un lancer de pièce équilibrée (**Barbe, Ledoux**), Loi binomiale, Ex : nombre de filles parmi  $n$  enfants d'une famille, Loi uniforme, Ex : proba d'obtenir  $k$  6 quand on lance un dé équilibré, Loi de Poisson, Loi géométrique.
- 3) Espérance, variance  
↔ **Ouvrard 1** : Déf : espérance, Ex : espérance d'une constante, Thm : thm de transfert, Ex : espérance des loïs usuelles, Déf : variance, Rq : expression grâce au thm de transfert, Ex : variance des loïs usuelles, Thm : Weierstrass (**ZQ**).

### II - Opérations et caractérisation de variables aléatoires discrètes

- 1) Indépendance  
↔ **Ouvrard 1** : Déf : indépendance, Prop : caractérisation pour des vad, Ex : les résultats des lancers de deux dés équilibrés sont indépendants (**Barbe, Ledoux**).
- 2) Somme de variables aléatoires discrètes indépendantes  
↔ **Ouvrard 1** : Prop : loi d'une somme de vad indépendantes, Ex : somme de Poisson, somme de Bernoulli.
- 3) Fonction génératrice  
↔ **Ouvrard 1** : Déf : fonction génératrice, Ex : pour une Bernoulli et une Poisson, Prop : propriétés de la fonction génératrice, Prop : fonction génératrice d'une somme de vad indépendantes, App : fonction génératrice d'une binomiale, App : Galton-Watson.

### III - Théorèmes limites

- 1) Approximation de loi de Poisson  
↔ **Barbe, Ledoux** : Prop : caractérisation de la convergence en loi pour des vad, **Ouvrard 1** : Thm : thm de Poisson, Ex : loi du nombre de personnes nées le même jour, (**Ouvrard 2**) Thm : Événements rares de Poisson (**Ouvrard 2**), Rq : loi d'une superposition d'événements rares.
- 2) Loi des grands nombres et théorème central limite  
↔ **Barbe, Ledoux** : Thm : loi faible des grands nombres, App : thm de Bernoulli (**Ouvrard 2**), App : la moyenne empirique est un estimateur consistant de la moyenne (**Cadre**), Thm : TCL, App : intervalle de confiance.  
↔ **Ouvrard 1** : App : Moivre-Laplace, Ex : proba d'obtenir entre 1800 et 2100 fois le 6 quand on jette 12000 fois un dé équilibré.

---

169.

- Ouvrard, *Probabilités 1* (pour tout I & II et un peu la fin)
- Ouvrard, *Probabilités 2* (pour quelques trucs, événements rares de poisson)
- Barbe, Ledoux, *Probabilité* (pour III surtout)

170. **Rapport du Jury** : Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des loïs usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Les techniques spécifiques aux variables aléatoires discrètes devront être abordées (par exemple la caractérisation de la convergence en loi). La notion de fonction génératrice pourra être abordée. Pour aller plus loin, certains candidats pourront étudier les chaînes de Markov à espace d'états fini ou dénombrable.