Preuve par récurrence

Principe général

Une preuve par récurrence s'utilise pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ dépendant de l'entier n est vraie pour tout entier n supérieur à un entier n_0 fixé.

Exemples :

1. $\boxed{\mathcal{P}_n \ : \ 2^n > n+1}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ (ici $n_0 = 2$).
2. $\boxed{\mathcal{P}_n \ : \ 5^n > 4^n + 3^n}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$ (ici $n_0 = 3$).
3. $\boxed{\mathcal{P}_n \ : \ \forall x \geqslant -1, \ (1+x)^n \geqslant 1 + nx}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$ (ici $n_0 = 0$).
4. $\boxed{\mathcal{P}_n \ : \ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ (ici $n_0 = 1$).

Ce type de preuve se déroule en 3 étapes :

❶ **Initialisation** : Démontrer la propriété au rang n_0 initial, c'est-à-dire montrer que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.

❷ **Hérédité** : Supposer que la propriété est vraie à un certain rang $n \geq n_0$ et montrer qu'alors la propriété est vraie au rang $n+1$. Autrement dit, montrer que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}.$$

❸ **Conclusion** : Conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque : lors de l'étape de l'hérédité, **on doit toujours utiliser notre hypothèse de récurrence**, c'est-à-dire utiliser la propriété $\mathcal{P}_n$ que l'on a supposé vraie (pour ce rang n fixé). Dans la suite, cet aspect sera mis en relief par des exemples de preuves par récurrence.

Exemple 1 : Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n \ : \ 2^n > n+1$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ (ici $n_0 = 2$).

❶ **Initialisation** : Montrons que $\mathcal{P}_2$ est vraie. Comme $2^2 = 4$ et que $2 + 1 = 3$, on a bien $2^2 > 2 + 1$ donc la propriété est vraie au rang 2.

❷ **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}_n \ : \ 2^n > n+1$ est vraie à un certain rang $n \geq 2$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1} \ : \ 2^{n+1} > \underbrace{n+2}_{=(n+1)+1}$ est vraie.

On a $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ et par **hypothèse de récurrence** on sait que $2^n > n+1$, donc

$$2^{n+1} > 2 \times (n+1) = 2n + 2 > n + 2.$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

❸ **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exemple 2 : Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n \ : \ 5^n > 4^n + 3^n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$ (ici $n_0 = 3$).

❶ **Initialisation** : Montrons que $\mathcal{P}_3$ est vraie. Comme $5^3 = 125$ et que $4^3 + 3^3 = 91$, on a bien $5^3 > 4^3 + 3^3$ donc $\mathcal{P}_3$ est vraie.

❷ **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}_n \ : \ 5^n > 4^n + 3^n$ est vraie à un certain rang $n \geq 3$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1} \ : \ 5^{n+1} > 4^{n+1} + 3^{n+1}$ est vraie.

On a $5^{n+1} = 5 \times 5^n$ et par **hypothèse de récurrence** on sait que $5^n > 4^n + 3^n$, donc

$$5^{n+1} > 5 \times (4^n + 3^n) = \underbrace{5}_{>4} \times 4^n + \underbrace{5}_{>3} \times 3^n > 4 \times 4^n + 3 \times 3^n.$$

Finalement, on obtient $5^{n+1} > 4^{n+1} + 3^{n+1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

❸ **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.

Exemple 3 : Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n \ : \ \forall x \geqslant -1,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$ (ici $n_0 = 0$).

❶ **Initialisation** : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Soit $x \geqslant -1$ quelconque fixé, alors $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$ donc $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

❷ **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}_n \ : \ \forall x \geqslant -1,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$ est vraie à un certain rang $n \geq 0$.
Montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1} \ : \ \forall x \geqslant -1,\ (1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$ est vraie.

Soit $x \geqslant -1$ quelconque fixé. On a $(1+x)^{n+1} = (1+x) \times (1+x)^n$ et par **hypothèse de récurrence** on sait que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, donc comme $1 + x \geqslant 0$ on en déduit que

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Attention, lorsqu'on utilise l'hypothèse de récurrence on multiplie les deux termes de l'inégalité $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ par $(1+x)$ qui est positif donc le sens de l'inégalité reste inchangé ! L'argument $1 + x \geqslant 0$ est donc indispensable !

Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

❸ **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Remarque : dans l'exemple qui suit nous allons utiliser la notation contractée suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + \cdots + n.$$

Cette notation, si ce n'est pas déjà le cas, vous sera vite familière (voir **fiche 1 "Notations usuelles (somme, produit...) et identités remarquables"**).

Exemple 4 : Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n \ : \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ (ici $n_0 = 1$).

❶ **Initialisation** : Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et que $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$, on en déduit que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

❷ **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}_n \ : \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie à un certain rang $n \geq 1$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1} \ : \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k \ + (n+1)$ et par **hypothèse de récurrence** on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \qquad (\bigstar)$$

De plus,

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

En réunissant $(\bigstar)$ et $(\bigstar\bigstar)$ on en déduit finalement que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

❸ **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.