Exercice 1

Soient x_1, x_2, x_3 trois nombres complexes.

1. *(Question de cours)* Donner la définition des fonctions symétriques élémentaires de x_1, x_2, x_3, que l'on notera σ_1, σ_2 et σ_3.
Par définition, on a
$$\begin{cases} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3. \end{cases}$$

2. On suppose que $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$ et $\sigma_3 = -1$.

   (a) En déduire le polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 qui admet $x_1,\ x_2$ et x_3 comme racines.
   On cherche P de la forme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, $a_3 = 1$ et possédant x_1, x_2, x_3 comme racines. D'après un théorème du cours, on sait que :
$$\begin{cases} \sigma_1 &= -\dfrac{a_2}{a_3} &= -a_2 \\ \sigma_2 &= \dfrac{a_1}{a_3} &= a_1 \\ \sigma_3 &= -\dfrac{a_0}{a_3} &= -a_0. \end{cases}$$
   On en déduit donc que $a_2 = 0$, $a_1 = -2$ et $a_0 = 1$. Donc le polynôme recherché est
$$P = X^3 - 2X + 1.$$

   (b) Montrer que 1 est racine de P.
   $P(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 1 = 0$ donc 1 est bien racine de P.

   (c) En déduire les valeurs de $x_1,\ x_2$ et x_3.
   • **Méthode 1** : En faisant la division euclidienne (à détailler sur une copie) de P par $X - 1$ on obtient
$$P = (X - 1)(X^2 + X - 1).$$
   Le discriminant de $X^2 + X - 1$ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5$ donc les racines de $X^2 + X - 1$ sont :
$$\begin{cases} \alpha_1 &= \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 &= \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$
   On en déduit que $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_3 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, à permutation près.
   • **Méthode 2** : Par exemple, on peut supposer que $x_1 = 1$, ce qui nous donne dans le système de la question 1) :
$$\begin{cases} 0 &= 1 + x_2 + x_3 \\ -2 &= x_2 + x_3 + x_2x_3 \\ -1 &= x_2x_3. \end{cases}$$
   En particulier, grâce aux lignes 1 et 3, on en déduit que x_2 et x_3 sont racines du polynôme :
$$(X - x_2)(X - x_3) = X^2 - (x_2 + x_3)X + x_2x_3 = X^2 + X - 1.$$
   Puis on détermine les racines de $X^2 + X - 1$ comme dans la méthode précédente.

Exercice 2 *Division euclidienne*

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose
$$P = X^4 - 2X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 4.$$

1. Déterminer λ et μ pour que P soit divisible par $(X-2)^2$.
   • **Méthode 1** : on effectue la division euclidienne de P par $(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4$:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
X^4 & -2X^3 & +\lambda X^2 & +\mu X & +4 & X^2 \ -4X \ +4 \\
\cline{6-6}
-X^4 & +4X^3 & -4X^2 & & & X^2 \ +2X \ +\lambda+4 \\
\cline{1-5}
 & 2X^3 & +(\lambda-4)X^2 & +\mu X & +4 & \\
 & -2X^3 & +8X^2 & -8X & & \\
\cline{2-5}
 & & (\lambda+4)X^2 & +(\mu-8)X & +4 & \\
 & & -(\lambda+4)X^2 & +4(\lambda+4)X & -4(\lambda+4) & \\
\cline{3-5}
 & & & (4\lambda+\mu+8)X & -4\lambda-12 &
\end{array}
$$

   On a donc $P = (X-2)^2(X^2+2X+\lambda+4) + (4\lambda+\mu+8)X - 4\lambda - 12$. Pour que P soit divisible par $(X-2)^2$, il faut et il suffit que le reste de la division soit le polynôme nul, c'est-à-dire :

$$
\left\{\begin{array}{lcl} 4\lambda+\mu+8 & = & 0 \\ -4\lambda-12 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \mu & = & -8-4\lambda = -8+12 = 4 \\ \lambda & = & \dfrac{-12}{4} = -3 \end{array}\right.
$$

   Finalement, $P = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$.

   • **Méthode 2** : on souhaite que $(X-2)^2$ divise P donc que 2 soit racine de P d'ordre de multilplicité au moins 2. On doit donc nécessairement avoir $P(2) = P'(2) = 0$, c'est-à-dire :

$$
\begin{array}{rl}
 & \left\{\begin{array}{lcl} 2^4 - 2\times 2^3 + \lambda\times 2^2 + 2\mu + 4 & = & 0 \\ 4\times 2^3 - 6\times 2^2 + 2\lambda\times 2 + \mu & = & 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} 4\lambda + 2\mu + 4 & = & 0 \\ 8 + 4\lambda + \mu & = & 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} 4\lambda & = & -4-2\mu \\ 8-4-2\mu+\mu & = & 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & -3 \\ \mu & = & 4 \end{array}\right.
\end{array}
$$

   On en déduit donc que $P = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$.

2. Montrer qu'alors $\alpha = -1$ est racine d'ordre de multiplicité 2 de P.
   On a $P(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 4(-1) + 4 = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$.
   De plus, $P'(X) = 4X^3 - 6X^2 - 6X + 4$ donc $P'(-1) = -4 - 6 + 6 + 4 = 0$.
   Enfin, $P''(X) = 12X^2 - 12X - 6$ donc $P''(-1) = 12 + 12 - 6 = 18 \neq 0$.
   Donc -1 est racine d'ordre 2 de P.

3. En déduire une factorisation de P en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   D'après les questions précédentes, -1 et 2 sont toutes les deux racines d'ordre 2 de P. De plus, le coefficient dominant de P vaut 1 donc on en déduit la factorisation suivante dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = (X-2)^2(X+1)^2.$$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

On pose

$$P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 \quad \text{et} \quad Q = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + X^{10} + X^{12} + X^{14}.$$

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $z^8 = 1$ et $z \neq 1$, alors z est une racine de P.
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^8 = 1$ et $z \neq 1$. Alors

$$
\begin{aligned}
P(z) &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 \\
&= \frac{1-z^8}{1-z} \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique de raison } z \neq 1\text{)}. \\
P(z) &= 0.
\end{aligned}
$$

   D'où le résultat.

2. En déduire l'ensemble des racines de P.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^8 = 1$ et $z \neq 1$. Alors z est une racine 8-ième de l'unité différente de 1 donc les solutions sont :
$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{8}} = e^{i\frac{k\pi}{4}} \qquad \text{avec } k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$
Remarque : on retire la valeur $k = 0$ car sinon cela donnerait $z = 1$ et c'est la valeur que l'on souhaite exclure.
On obtient donc 7 racines pour P qui est de degré 7, ce sont donc les seules :
$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ z_2 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \\ z_3 &= e^{i\frac{3\pi}{4}}, \\ z_4 &= e^{i\pi} = -1, \\ z_5 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \\ z_6 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \\ z_7 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

3. Décomposer P en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
Dans $\mathbb{C}[X]$, on a
$$P = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X-i)(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X+1)(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}})(X+i)(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}).$$
Pour en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les facteurs avec des racines conjuguées, ce qui donne :
$$\begin{aligned} P &= (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X-i)(X+i)(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}})(X+1) \\ &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + |e^{i\frac{\pi}{4}}|^2\right)\left(X^2 - 2\mathcal{R}e\,(i)\,X + |i|^2\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + |e^{i\frac{3\pi}{4}}|^2\right)(X+1) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2+1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X+1). \end{aligned}$$
La dernière ligne correspond à la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

4. En déduire une décomposition de Q en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on pourra poser $Y = X^2$.
En posant $Y = X^2$, on obtient
$$Q = 1 + Y + Y^2 + Y^3 + Y^4 + Y^6 + Y^7 = P(Y).$$
Donc
$$\begin{aligned} Q &= \prod_{k=1}^{7}\left(Y - e^{i\frac{k\pi}{4}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{7}\left(X^2 - e^{i\frac{k\pi}{4}}\right) \qquad \text{car } Y = X^2, \\ &= \prod_{k=1}^{7}\left(X^2 - \left(e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)^2\right) \\ Q &= \prod_{k=1}^{7}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)\left(X + e^{i\frac{k\pi}{8}}\right) \qquad \text{en utilisant l'identité remarquable } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b). \end{aligned}$$
La dernière ligne est bien la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ car tous les facteurs sont de degré 1.

5. En déduire que
$$\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 8}}^{15} e^{i\frac{k\pi}{8}} = 1.$$

Montrons que ce produit vaut $Q(0)$. Pour $k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$$-e^{i\frac{k\pi}{8}} = e^{i\pi}e^{i\frac{k\pi}{8}} = e^{i\pi+i\frac{k\pi}{8}} = e^{i\frac{(k+8)\pi}{8}} = e^{i\frac{\ell\pi}{8}},$$

où $\ell = k+8 \in \{9,10,11,12,13,14,15\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
Q &= \prod_{k=1}^{7}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)\left(X + e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{7}\left(X + e^{i\frac{(k+8)\pi}{8}}\right)\left(X + e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)\\
&= \prod_{\ell=9}^{15}\left(X + e^{i\frac{\ell\pi}{8}}\right)\prod_{k=1}^{7}\left(X + e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)\\
Q &= \prod_{\substack{k=1\\k\neq 8}}^{15}\left(X + e^{i\frac{k\pi}{8}}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq 8}}^{15} e^{i\frac{k\pi}{8}} = Q(0) = 1.$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ *Fractions rationnelles*

On pose

$$F = \frac{X^5 - X^4 + 1}{X^4 + X^2}.$$

1. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.
   Cherchons d'abord la partie entière de F.

$$\begin{array}{rrrrr|rr}
X^5 & -X^4 & & & +1 & X^4 & +X^2 \\
\cline{6-7}
-X^5 & & -X^3 & & +1 & X & -1 \\
\cline{1-5}
 & -X^4 & -X^3 & & +1 & & \\
 & +X^4 & & +X^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & -X^3 & +X^2 & +1 & &
\end{array}$$

Ainsi,

$$F = X - 1 + \frac{-X^3 + X^2 + 1}{X^4 + X^2}.$$

On pose $\tilde{F} = \dfrac{-X^3 + X^2 + 1}{X^4 + X^2}$.

On a $X^4 + X^2 = X^2(X^2+1) = X^2(X-i)(X+i)$.
Donc on cherche $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\tilde{F} = \frac{-X^3 + X^2 + 1}{X^2(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} \qquad (\star)$$

Déjà, on a

$$\begin{aligned}
b &= \left[\frac{-X^3 + X^2 + 1}{(X-i)(X+i)}\right]_{X=0} = \frac{1}{-i^2} = 1,\\
c &= \left[\frac{-X^3 + X^2 + 1}{X^2(X+i)}\right]_{X=i} = \frac{-i^3 + i^2 + 1}{i^2 \times 2i} = \frac{-1}{2},\\
d &= \left[\frac{-X^3 + X^2 + 1}{X^2(X-i)}\right]_{X=-i} = \frac{-(-i)^3 + i^2 + 1}{i^2 \times (-2i)} = \frac{-1}{2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour trouver a, on multiplie les deux membres de $(\star)$ par X

$$\frac{-X^3+X^2+1}{X(X-i)(X+i)} = a + \frac{b}{X} + \frac{cX}{X-i} + \frac{dX}{X+i},$$

puis on fait tendre X vers $+\infty$, ce qui donne :

$$-1 = a+0+c+d \quad \Leftrightarrow \quad -1 = a - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$

Conclusion : la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ est

$$F = X - 1 + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{2(X-i)} - \frac{1}{2(X+i)}.$$

2. En déduire sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   On a

$$\begin{aligned} F &= X - 1 + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{2(X-i)} - \frac{1}{2(X+i)} \\ &= X - 1 + \frac{1}{X^2} + \frac{-(X+i)-(X-i)}{2(X-i)(X+i)} \\ F &= X - 1 + \frac{1}{X^2} + \frac{-2X}{2(X^2+1)}. \end{aligned}$$

Donc la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est

$$F = X - 1 + \frac{1}{X^2} + \frac{-X}{X^2+1}.$$

3. Soit $t \geqslant 1$. Calculer l'intégrale suivante

$$I(t) = \int_1^t \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^4 + x^2} \mathrm{d}x.$$

En utilisant la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_1^t \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^4 + x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_1^t \left(x - 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{-x}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \right]_1^t \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2}\ln(2) \right) \\ I(t) &= \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{t^2+1} \right) + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$