Nombres complexes

M. Varvenne

1 Construction de $\mathbb{C}$

Sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ on définit les deux opérations suivantes :

Définition 1.1 ($\mathbb{C}$ visualisé dans $\mathbb{R}^2$)**.**
Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (x', y') &= (x + x',\ y + y')\\ (x, y) \otimes (x', y') &= (xx' - yy',\ xy' + x'y)\end{aligned}$$

On note alors $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations.

Passage à la notation algébrique des éléments de $\mathbb{C}$:

- on peut « identifier » les couples de la forme $(x, 0)$ à des réels, on le note alors simplement x.
- on remarque que le couple $(0, 1)$ vérifie $(0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0)$ donc $(0, 1) \otimes (0, 1)$ « s'identifie » au réel -1.
  Le complexe $(0, 1)$ est alors noté i et vérifie $i \times i = -1$.
- les couples (x, y) vérifient donc

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x, 0) \oplus (0, y)\\ &= (x, 0) \otimes (1, 0) \quad \oplus \quad (0, 1) \otimes (y, 0)\\ &= x \times 1 + i \times y \quad \text{en faisant les « identifications » précédentes.}\end{aligned}$$

Définition 1.2 ($\mathbb{C}$ définition algébrique)**.**
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et i est un nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, on a

$$\begin{aligned}z + z' &= (x + x') + i(y + y')\\ z \times z' &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y)\end{aligned}$$

Remarque 1.1 (Unicité de l'écriture algébrique)**.**
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.
On en déduit que pour deux complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on a

$$z = z' \iff (a = a' \text{ et } b = b').$$

Définition 1.3. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Alors
- x est appelée la **partie réelle** de z, on note $x = \mathcal{R}e(z)$.
- y est appelée la **partie imaginaire** de z, on note $y = \mathcal{I}m(z)$.

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est dit **réel**,

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0.$$

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est dit **imaginaire pur**,

$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0.$$

Remarque 1.2. *Dans l'ensemble des nombres complexes, on retrouve les 3 identités remarquables ainsi que la formule du binôme de Newton :*

$$\begin{aligned}(z+z')^2 &= z^2 + 2zz' + z'^2\\ (z-z')^2 &= z^2 - 2zz' + z'^2\\ (z+z')(z-z') &= z^2 - z'^2\\ (z+z')^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}.\end{aligned}$$

On a même la nouvelle identité suivante

$$z^2 + z'^2 = (z+iz')(z-iz').$$

2 Conjugué et opérations

Définition 2.1. Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
On appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 2.2. *Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. *si* $z' \neq 0$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
5. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
6. $\overline{\overline{z}} = z$

Proposition 2.3. *Pour $z \in \mathbb{C}$,*

1. $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$
2. $z - \overline{z} = 2i\,\mathcal{I}m(z)$
3. $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = z$
4. $z \in i\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = -z$

L'introduction du conjugué nous permet d'introduire la notion de module d'un nombre complexe comme suit.

Définition 2.4 (Module)**.** Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
$z\overline{z} = x^2 + y^2$ est un réel positif et le nombre $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé le **module** de z, on note

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposition 2.5. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

1. $|z| \geqslant 0$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|zz'| = |z| \times |z'|$
4. *si* $z \neq 0$, $\quad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
5. *si* $z' \neq 0$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
6. $|z^n| = |z|^n$
7. $|z| = |-z|$
8. $|\overline{z}| = |z|$

3 Plan complexe

Dans toute la suite du chapitre, on considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition 3.1.

- À tout $z = x + iy$ élément de $\mathbb{C}$ on associe l'unique point M du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y).
- z est appelée l'**affixe** du point M et M est le **point image** de z. On note $M(z)$.
- Le plan $\mathcal{P}$ muni de cette correspondance est appelé le **plan complexe**.
- Le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ est appelé **vecteur image** de z, et z est aussi appelé l'**affixe** de $\overrightarrow{OM}$.

« ... faire des dessins ... »

Proposition 3.2.

Soient deux points A et B d'affixes z_A et z_B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $AB = |z_B - z_A|$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe z et z', alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe λz.
L'affixe z_I du milieu I du segment $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

« ... faire des dessins ... »

Traduction de quelques notions de géométrie du plan :

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire si et seulement si $z_B - z_A = z_C - z_D$.
- le point M d'affixe z appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $z = z_A + \lambda(z_B - z_A)$.

Proposition 3.3 (Inégalités triangulaires)**.** *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ alors*

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \textit{et} \quad \big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z - z'|.$$

« ... faire des dessins ... »

4 Forme trigonométrique

Définition 4.1 (Argument)**.** Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et M le point d'affixe z.
On appelle **argument** de z, toute mesure θ de l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$.
On note

$$\arg(z) = \theta \ [2\pi]$$

car θ n'est pas unique, il est défini à un multiple de 2π près.
L'ensemble des arguments de z est donc $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

« . . . faire des dessins . . . »

Définition-Théorème 4.2. *Tout nombre complexe **non nul** z se met sous la **forme trigonométrique***

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

où θ est un argument de z et $r = |z|$.

Proposition 4.3. *Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$,*

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \quad [2\pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Remarque 4.1. *Si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = p(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ avec $p > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors*

$$p = |z| \quad \text{et} \quad \alpha = \arg(z) \ [2\pi].$$

Proposition 4.4. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors*

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$
2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]$
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$
4. $\arg(z^n) = n\arg(z) \ [2\pi]$

5 Notation exponentielle

Notation 5.1 (Exponentielle complexe)**.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

La définition de cette exponentielle complexe prolonge l'exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\mathbb{C}$. En effet pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a alors

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Définition 5.2. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ de module $r = |z|$ et d'argument $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$, on a donc d'après la notation précédente

$$z = re^{i\theta}.$$

Cette notation est appelée **forme exponentielle** de z.

Proposition 5.3. *Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$,*

1. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
2. $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$
3. $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$
4. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Valeurs particulières à connaître : $e^{i0} = 1,\ \ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ \ e^{i\pi} = -1,\ \ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$

Notation 5.4. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1,

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\quad |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta},\quad \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, le point d'affixe z se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1, que l'on appelle le **cercle trigonométrique**.

6 Applications à la trigonométrie

6.1 Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

Proposition 6.1 (Formule de Moivre)**.** *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode pour développer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$:

1. Développer $Z = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ à l'aide du binôme de Newton.
2. Utiliser la formule de Moivre pour dire que $\cos(n\theta) = \mathcal{R}e(Z)$ et $\sin(n\theta) = \mathcal{I}m(Z)$.

6.2 Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$

Proposition 6.2 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Méthode pour linéariser $\cos^n(\theta)$ (respectivement $\sin^n(\theta)$) :

1. Développer $\cos^n(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ (respectivement $\sin^n(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$) à l'aide du binôme de Newton.
2. Ré-utiliser les formules d'Euler pour reconnaître les termes en $\cos(k\theta)$ et en $\sin(k\theta)$.

6.3 Technique de factorisation par l'arc-moitié

Proposition 6.3. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a*

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

6.4 Formules de trigonométrie

Formules d'additions :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.
\end{aligned}$$

Formules de soustractions :

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.
\end{aligned}$$

Formules de dupplications :

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\
\sin(2a) &= 2\cos(a)\sin(a)\\
\tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.
\end{aligned}$$

Formules de linéarisation :

$$\begin{aligned}
\sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)\\
\sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)\\
\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)
\end{aligned}$$

Sommes en produits :

$$\begin{aligned}
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

7 Résolutions des équations d'équations $az^2+bz+c=0$

7.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 7.1. Soit $a \in \mathbb{C}$, on dit que $z \in \mathbb{C}$ est **une racine carrée** de a si $z^2 = a$.

Pour $a \in \mathbb{C}$, la notation $\sqrt{a}$ **n'a aucun sens** sauf si $a \in \mathbb{R}^+$!!!

Théorème 7.2. *Tout nombre complexe* ***non nul*** *admet exactement deux racines carrées. Plus précisément, si $a \in \mathbb{C}^*$ est tel que $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les racines carrées de a sont*

$$z_1 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Méthode algébrique pour trouver les racines carrées de $a = x + iy \in \mathbb{C}^*$:

1. On cherche $Z = X + iY$ tel que $Z^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad (X^2 - Y^2) + 2iXY = x + iy$.
2. On résout le système suivant d'inconnues X et Y :

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 & = & x \\ 2XY & = & y \\ X^2 + Y^2 & = & \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

7.2 Equations du second degré à coefficients complexes

Dans toute cette section, on considère les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ du type

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

Théorème 7.3. *L'équation (E) définie ci-dessus admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$. Ces solutions sont données par :*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est ***une*** *racine carrée du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.*
De plus, z_1 et z_2 sont distinctes si et seulement si $\Delta \neq 0$.

Remarque 7.1 (Lien coefficients-racines et factorisation)**.** *Avec les notations du théorème précédent, on a*

- $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ *et* $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$,
- $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

8 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

8.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 8.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que

$$z^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble constitué des racines n-ième de l'unité.

Théorème 8.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, ce sont les nombres complexes de la forme*

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad \textit{avec} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Autrement dit,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}.$$

Remarque 8.1. *Soit $z \in \mathbb{U}_n \backslash \{1\}$, alors*

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

8.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Définition 8.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On appelle **racine n-ième de** a tout nombre complexe z tel que

$$z^n = a.$$

Théorème 8.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de a. De plus, si on note $r = |a|$ et $\theta = \arg(a)$ alors les racines n-ièmes de a sont les complexes suivants :*

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad \textit{avec} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

9 Applications à la géométrie

9.1 Utilisation du module et de l'argument

Proposition 9.1. *Soient A, B, C, D quatres points distincts du plan complexe $\mathcal{P}$ d'affixes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Alors*

1. $(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)\ [2\pi]$,
2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi]$.

Proposition 9.2 (Lieux de points)**.** *Soient A, B deux points du plan complexe $\mathcal{P}$ d'affixes $a, b \in \mathbb{C}$. Alors*

1. *le cercle de centre A et de rayon $R > 0$ est l'ensemble de points suivant*
$$\{M(z), \quad |z-a| = R\},$$
2. *le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon $R > 0$ est l'ensemble de points suivant*
$$\{M(z), \quad |z-a| < R\} \quad (\textit{resp.}\ \{M(z), \quad |z-a| \leqslant R\}),$$
3. *la médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble de points suivant*
$$\{M(z), \quad |z-a| = |z-b|\}.$$

9.2 Translation

Proposition 9.3. *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a, alors l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z + a$$

correspond à la translation de vecteur $\vec{u}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

« ... faire des dessins ... »

9.3 Rotation

Proposition 9.4. *Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe ω et θ un réel. Alors l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$

correspond à la rotation de centre Ω et d'angle θ dans le plan $\mathcal{P}$.

« ... faire des dessins ... »

9.4 Homothétie

Proposition 9.5. *Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe ω et k un réel. Alors l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \omega + k(z - \omega)$$

correspond à l'homothétie de centre Ω et de rapport k dans le plan $\mathcal{P}$.

« ... faire des dessins ... »

9.5 Applications $z \mapsto az + b$

Proposition 9.6. *Soit $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On définit l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

Alors

- *si $a = 1$, f correspond à la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.*
- *si $a \neq 1$, alors f est appelée similitude directe*
  - *de centre Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$,*
  - *de rapport $k = |a|$,*
  - *d'angle $\arg(a)$.*