Algèbre linéaire
Chapitre 3 - Systèmes linéaires

M. Varvenne

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1.1. On appelle **système linéaire** de p équations à n inconnues, tout système de la forme

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right. \iff \forall i \in [\![1,p]\!],\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

Les éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont les **coefficients** du système, les éléments $b_i \in \mathbb{K}$ forment le **second membre** du système et les $x_j \in \mathbb{K}$ sont appelées **inconnues** du système.

Remarque 1.2 (Écriture matricielle)**.**

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ alors

$$(S) \iff AX = B.$$

Définition 1.3.
- Un système linéaire est dit **homogène** si le second membre est nul, c'est-à-dire si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $b_i = 0$.
- Une **solution** du système (S) est la donnée de n éléments $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$AC = B \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

- **Résoudre** (S) c'est déterminer toutes les solutions de (S).
- Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** si ils ont les mêmes solutions.

Théorème 1.4. Si $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible, alors le système (S) $AX = B$ est équivalent au système (S') $PAX = PB$.

Proposition 1.5. Si $n = p$ (donc si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et si A est inversible, alors le système (S) $AX = B$ admet une unique solution qui est $X = A^{-1}B$.
On dit que (S) est un **sytème de Cramer**.

2 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

2.1 Opérations élémentaires

Définition 2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée** si chaque ligne non nulle de A commence par strictement plus de 0 que la ligne précédente.

Théorème 2.2. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que PA soit échelonnée.

Le but de la **méthode du pivot de Gauss** est de rendre le système échelonné pour faciliter la résolution de celui-ci.

Proposition 2.3 (Opérations élémentaires)**.** Les transformations suivantes changent tout système en un sytème équivalent :

- échanger deux lignes :
$$L_i \leftrightarrow L_j \text{ pour } i \neq j,$$
- multiplier une ligne par un scalaire non nul :
$$L_i \leftarrow \lambda L_i \text{ avec } \lambda \neq 0,$$
- ajouter une ligne multipliée par un scalaire à une autre ligne :
$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } i \neq j.$$

2.2 Méthode du pivot de Gauss sur un exemple

Étape 1. Passage à une forme échelonnée.

Soit le système suivant à résoudre :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrcr} & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

Pour simplifier, on passe à la notation suivante, sous forme de **matrice augmentée** :

$$(S) \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right)$$

Pour commencer la méthode du pivot de Gauss, on cherche dans la première colonne le premier coefficient non nul en partant de la première ligne puis on échange la ligne correspondante avec la première ligne.

Ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$, cela donne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right)$$

On appelle alors **pivot** le coefficient en position $(1,1)$ (première ligne, première colonne). Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne.

Ici, on fait alors l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Ensuite, on passe au **deuxième pivot**, c'est-à-dire : on cherche dans la deuxième colonne le premier coefficient non nul en partant de la deuxième ligne puis on échange la ligne correspondante avec la deuxième ligne.

Ici, il n'y a pas besoin de faire d'échange car le coefficient en position $(2,2)$ est déjà non nul.

On se sert alors du deuxième pivot pour éliminer tous les termes sur la deuxième colonne situés en dessous du deuxième pivot.

Ici, on fait alors l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

Ici, le système est echelonné, c'est la fin de l'algorithme du pivot de Gauss.

Dans le cas où le sytème n'est toujours pas échelonné, on continue les mêmes étapes. On passe au troisième pivot, c'est-à-dire : on cherche dans la troisième colonne le premier coefficient non nul en partant de la troisième ligne puis on échange la ligne correspondante avec la troisième ligne.
On se sert alors du troisième pivot pour éliminer tous les termes sur la troisième colonne situés en dessous du troisième pivot. Etc... jusqu'à ce que le système soit échelonné.

Cas particulier : Si une fois le système échelonné, il y a une ligne avec que des 0 à gauche et un second membre non nul, alors le système est dit **incompatible**. Il n'y a alors pas de solution au système, la résolution est terminée.

Étape 2. Résolution par substitution.

On passe de nouveau en écriture système :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ & & 2x_3 & +10x_4 & = & 8 \end{array}\right.$$

On part de la dernière ligne : on isole l'inconnue la plus à gauche, on l'exprime en fonction des autres inconnues, puis on remonte dans les équations du dessus par substitution.

Ici, cela donne

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3(4-5x_4) + 17x_4 &= 4 \\ -x_2 + 2(4-5x_4) + 13x_4 &= 5 \\ x_3 &= 4-5x_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 - 2(3+3x_4) + 12 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 &= 3+3x_4 \\ x_3 &= 4-5x_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 &= -2+4x_4 \\ x_2 &= 3+3x_4 \\ x_3 &= 4-5x_4 \end{cases}$$

Étape 3. Solutions.

On a choisi x_4 comme variable libre, cela nous a donné x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = -2+4x_4, \quad x_2 = 3+3x_4, \quad x_3 = 4-5x_4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$$\mathcal{S} = \{(-2+4x_4, 3+3x_4, 4-5x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

3 Applications

3.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Méthode : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. On part de la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ et à l'aide d'opérations élémentaires on essaie de transformer cette matrice augmentée pour obtenir $(I_n \mid B)$. Dans ce cas, on a alors $B = A^{-1}$.

Exemple : Calcul de l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On part donc de la matrice augmentée $(A \mid I_4)$ et on commence comme la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 4L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Une fois que l'on a obtenu une matrice triangulaire supérieure dans la partie gauche, on va appliquer la méthode du pivot de Gauss « de bas en haut et de droite à gauche » pour obtenir une matrice diagonale dans la partie gauche de la matrice augmentée, comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_4}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_4}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin, on se ramène à la matrice I_4 à gauche en divisant chaque ligne par 2 :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & 1 & -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Longleftrightarrow (I_4 \mid A^{-1}).$$

Ainsi, l'inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Calcul du rang d'une application linéaire

Définition 3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
On appelle **rang** de A, le rang de la famille formée des vecteurs colonnes de A. On le note $\mathrm{rg}(A)$.
On appelle **image** de A et on note $\mathrm{Im}(A)$ l'ensemble suivant

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = AX\}.$$

Remarque 3.2.

- On a $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}(A)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, et si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, alors
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) \overset{\text{rappel}}{=} \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Proposition 3.3. Soit A une matrice <u>échelonnée</u>, alors le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de la matrice A.

Méthode de calcul du rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

- Transformer A sous forme de matrice échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On note A' la matrice échelonnée obtenue.
- On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$, et par la proposition précédente, le rang de A' est égal au nombre de lignes non nulles de A'.

Proposition 3.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors A est inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = n$.

3.3 Déterminer le noyau d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

Proposition 3.5. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}$.

On rappelle que le vecteur colonne $Y = AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \end{pmatrix}$ correspond aux coordonnées de $f(x) \in F$ dans la base $\mathcal{B}'$. Ainsi,

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad X \in \left\{X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX' = 0\right\} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(A).$$

Remarque 3.6.

- Déterminer le noyau de f revient à chercher les solutions du système homogène $AX = 0$. On pourra alors utiliser la méthode du pivot de Gauss.
- $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$.