CPI
$1^{\text{ère}}$ année

Année 2021-2022

Algèbre linéaire

Chapitre 2 - Applications linéaires

M. Varvenne

Dans tout ce chapitre :

$\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ désigneront deux $\mathbb{K}$-ev.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Une application $f : E \to F$ est appelée **application linéaire** ou **morphisme d'espace vectoriel** lorsqu'elle vérifie :

- $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1.2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors

- $f(0_E) = 0_F$,
- $\forall u \in E$, $f(-u) = -f(u)$ où $-u$ désigne le symétrique de u dans le groupe $(E, +)$,
- $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n).$$

Proposition 1.3 (Caractérisation des applications linéaires)**.** Soit $f : E \to F$ une application. Alors f est linéaire si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Définition 1.4.

- Une application linéaire de E vers E est appelée un **endomorphisme** de E. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective de E vers F est appelée un **isomorphisme**. Si une telle application existe, on dit que E et F sont **isomorphes**.
- Une application linéaire bijective de E vers E est appelée un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de E se note $GL(E)$.
- Une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ est appelée une **forme linéaire**.

Exemple 1.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+z, y) \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{array},$$

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}, \quad \psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, y+z, x-z). \end{array}$$

f, g, φ et ψ sont des applications linéaires. En particulier, g est un isomorphisme, φ est une forme linéaire et ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (c'est même un automorphisme).

Proposition 1.5. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors
$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G).$$

1.2 Noyau, image

Définition 1.6. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de f noté $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble
$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$
- L'**image** de f noté $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E, v = f(u)\}.$$

Proposition 1.7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.

Exemple 2. *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, y + z, x - z). \end{array}$

On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\ (1, -1, 1)\ )$ *et* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\ (1, 1, 0),\ (0, 1, -1)\ )$.

Proposition 1.8. Soit f une application linéaire de E vers F.

1. f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.
3. f est bijective donc est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

1.3 Inverse

Notation 1.9. On note $\mathrm{Id}_E: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ l'application **identité** de E.
En particulier, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 1.10. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est <u>bijective</u>, alors l'unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ est linéaire.
On note $g = f^{-1}$ et on a $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Rang d'une application linéaire

Définition-Théorème 2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on appelle **rang de** f, noté $\mathrm{rg}(f)$, sa dimension. Autrement dit,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

En particulier, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))\right) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Théorème 2.2 (Théorème du rang)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Remarque 2.3. Dans les deux résultats précédents, il n'y a aucune hypothèse sur la dimension de F, celui-ci **n'est pas** nécessairement de dimension finie.

Corollaire 2.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E et F sont de même dimension finie. Alors

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Remarque 2.5. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective et si E et F sont de dimension finie, alors

$$\dim(E) = \dim(F).$$

2.2 Matrice d'une application linéaire

Dans cette section, on suppose que E et F sont de dimension finie. On pose

$$n = \dim(E) \quad \text{et} \quad p = \dim(F).$$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $f(e_j) \in F$ donc il existe $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \dots + a_{pj}e'_p = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}e'_i.$$

Définition 2.6. La **matrice** de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la famille des coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ tels que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}e'_i.$$

On note alors

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Dans la pratique la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ se présente sous la forme d'un tableau de nombres, comme suit :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Écriture matricielle de $f \in \mathcal{L}(E,F)$

Soit $x \in E$, alors il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Comme f est linéaire, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{p1}e'_p) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{p2}e'_p) \\ &\qquad + \cdots + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{pn}e'_p) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n})e'_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n})e'_2 \\ &\qquad + \cdots + (x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \cdots + x_na_{pn})e'_p. \end{aligned}$$

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$Y = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \cdots + x_na_{pn} \end{pmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} AX} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \end{pmatrix}$$

On note finalement

$$Y = AX$$

où les matrices A, X et Y sont celles définies ci-dessus.

2.3 Application linéaire associée à une matrice

Inversement à la section précédente, à toute matrice à p lignes et n colonnes $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$ on peut associer une application linéaire comme suit :

Proposition 2.7. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ respectivement, alors A définit une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Si x a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$,

alors $f(x)$ a pour coordonnées $AX = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \cdots + x_na_{pn} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Notation 2.8. L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes, dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$, est noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Lorsque le nombre de lignes et le nombre de colonnes sont tous deux égaux à n, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3 Opérations sur les appli. lin. et sur les matrices

3.1 Somme et produit par un scalaire

Définition 3.1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Leur **somme** $S = A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \quad s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le **produit de A par le scalaire λ** est la matrice $C = \lambda A$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Remarque 3.2. L'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire vues ci-dessus, a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 3.3 (Somme)**.**

- Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application $\begin{array}{rccl} f+g\colon & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.
- De plus, si E et F sont de dimension finie de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ respectivement, on définit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$ et $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g)$.
  Alors
  $$S = A + B.$$

Proposition 3.4 (Produit par un scalaire)**.**

- Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $\begin{array}{rccc} \lambda f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}(E,F)$.
- De plus, si E et F sont de dimension finie de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ respectivement, on définit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)$.
  Alors
  $$C = \lambda A.$$

3.2 Composition de morphismes en dimension finie

Dans cette section, E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie avec

$$n = \dim(E), \quad p = \dim(F) \ \text{ et } \ q = \dim(G).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_q)$ respectivement une base de E, de F et de G.

Définition 3.5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors le **produit matriciel** $C = BA$ est une matrice de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall i \in [\![1,q]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}.$$

Remarque 3.6. Attention, le produit BA n'est défini que si le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A !
De plus, le produit matriciel **n'est pas commutatif**, c'est-à-dire que pour deux matrices A et B, en général on a $AB \neq BA$ (lorsque les deux produits AB et BA sont bien définis).

Proposition 3.7 (Composition de morphismes)**.** Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
On a vu précédemment que $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.
Alors
$$C = BA.$$

4 Matrices inversibles et changement de base

4.1 Inversibilité

Définition 4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice identité d'ordre** n et on note I_n la matrice carrée à n lignes et n colonnes suivante :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ses coefficients diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

Proposition 4.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$AI_n = I_nA = A.$$

Définition 4.3. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

On note alors $B = A^{-1}$ la **matrice inverse** de A.

Proposition 4.4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors sa matrice inverse est unique.

Proposition 4.5. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de <u>même dimension</u> finie $n \in \mathbb{N}^*$, de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors f est <u>bijective</u> si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est <u>inversible</u>. Dans ce cas, on a

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n.$$

4.2 Changement de base

Dans cette section, on considère E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

Définition 4.6. La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées de e'_1, e'_2,. . ., e'_n dans la base $\mathcal{B}$. On note

$$P = \mathscr{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Proposition 4.7. Soit $x \in E$ associé au vecteur colonne X dans la base $\mathcal{B}$ et au vecteur colonne X' dans la base $\mathcal{B}'$. Si $P = \mathscr{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, alors on a la relation

$$X = PX'.$$

Théorème 4.8. La matrice de passage $\mathscr{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ correspond à la matrice de l'application identité $\begin{array}{rccc}\mathrm{Id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x\end{array}$ de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, $\mathscr{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
Cette matrice est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\left(\mathscr{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathscr{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

4.3 Matrice d'une application linéaire et changement de base

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie avec $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.
On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E, ainsi que $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, \dots, f'_p)$ deux bases de F.

Théorème 4.9 (Formule de changement de base)**.** Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose

$$P = \mathscr{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}, \quad Q = \mathscr{P}_{\mathcal{F} \to \mathcal{F}'}, \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(g) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}'}(g).$$

Alors on a

$$B = Q^{-1}AP.$$

Ce théorème peut se résumer à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathcal{B}') \arrow[r, "g", "B"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P"] & (F, \mathcal{F}') \arrow[d, "Q"', "\mathrm{Id}_F"] \\
(E, \mathcal{B}) \arrow[r, "A", "g"'] & (F, \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

Théorème 4.10 (Cas d'un endomorphisme)**.** Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$P = \mathscr{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}, \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(g).$$

Alors on a

$$B = P^{-1}AP.$$

Dans ce cas, on dit que A et B sont deux matrices **semblables**.

Le diagramme correspondant est :

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathcal{B}') \arrow[r, "g", "B"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P"] & (E, \mathcal{B}') \arrow[d, "P"', "\mathrm{Id}_E"] \\
(E, \mathcal{B}) \arrow[r, "A", "g"'] & (E, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

5 Déterminant en dimension 2 et 3

Définition 5.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **déterminant** de A correspond au déterminant des vecteurs colonnes de A, on le note $\det(A)$.

Remarque 5.2. Ici, on se limitera au cas $n = 2$ ou $n = 3$ mais la notion de déterminant peut se généraliser à $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Proposition 5.3.

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A) = ad - bc.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Il s'agit de la **règle de Sarrus**.

Proposition 5.4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

Théorème 5.5 (Caractérisation de l'inversibilité)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Théorème 5.6 (Déterminant d'un endomorphisme)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Alors la valeur de $\det(A)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On pose alors $\det(f) = \det(A)$.

Remarque 5.7. Si E est de dimension finie alors

$$f \in \mathcal{L}(E) \text{ est bijective } \iff \det(f) \neq 0.$$