Algèbre linéaire

Chapitre 1 - Espaces vectoriels

M. Varvenne

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1. Soit E un ensemble. Une **loi de composition interne** sur E est une application de $E \times E \to E$.

Exemple 1. *Dans $\mathbb{R}$, les lois usuelles $+$, $\times$ et $-$ sont des lois de compositions internes.*

Définition 1.2. Soit un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un **groupe** si
- $\forall a, b, c \in G, \quad a * (b * c) = (a * b) * c$.
- $\exists e \in G, \forall a \in G, \quad a * e = e * a = a$, on appelle alors e **l'élément neutre** de $(G, *)$.
- $\forall a \in G, \exists a' \in G, \quad a * a' = a' * a = e$, on appelle alors a' le **symétrique** de a.

Si de plus, pour tout $a, b \in G$, on a $a * b = b * a$, alors le groupe $(G, *)$ est dit **commutatif** ou **abélien**.

Exemple 2.
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ *sont des groupes abéliens.*
- $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{Z}^*, \times)$ *ne sont pas des groupes.*

Définition 1.3.
Soit E un ensemble non vide muni d'une loi $+$ de composition interne $\begin{cases} E \times E & \to E \\ (u, v) & \mapsto u + v \end{cases}$

et d'une loi $\cdot$ de composition externe $\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \to E \\ (\alpha, u) & \mapsto \alpha.u \end{cases}$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ ou encore un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** si et seulement si :
- $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (u, v) \in E^2$,

  (1) $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$

  (2) $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

  (3) $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$

  (4) $1.u = u$

Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.
Le neutre du groupe $(E, +)$ est appelé le **vecteur nul** et est noté 0_E pour ne pas le confondre avec le scalaire 0.

Exemple 3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *sont des $\mathbb{R}$-ev,* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *est aussi un $\mathbb{C}$-ev.*

Proposition 1.4. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout vecteur $u \in E$:

- $0.u = 0_E$
- $\alpha.0_E = 0_E$
- $\alpha.u = 0_E \Leftrightarrow (\alpha = 0$ ou $u = 0_E)$
- $(-1).u = -u$ où $-u$ désigne le symétrique de u dans le groupe commutatif $(E,+)$.

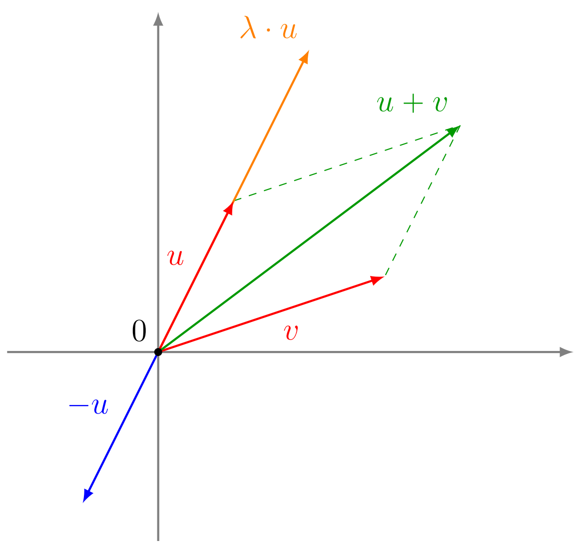
Remarque 1.5. Attention, le symétrique de u est ici noté $-u$ car la loi interne $+$ de l'espace vectoriel E correspond en général à l'opération usuelle de l'addition. Cependant, par définition $-u$ correspond à l'unique vecteur v tel que $u+v = v+u = 0_E$.
Nous verrons un exemple en TD où cette loi $+$ ne correspond pas à l'addition usuelle.

Définition-Théorème 1.6. Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-ev.
Soient $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ deux éléments de $E\times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
On définit les deux opérations $\boxplus$ et $\boxdot$ suivantes :

$$\begin{cases} u \boxplus v = (u_1+v_1, u_2+v_2) \\ \lambda \boxdot u = (\lambda.u_1, \lambda.u_2) \end{cases}$$

Alors $(E\times F, \boxplus, \boxdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev, appelé **espace vectoriel produit**.
Le vecteur nul est $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$.

Exemple 4. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$*-ev.*



De même, $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ *sont de* $\mathbb{R}$*-ev.*

2 Sous-espace vectoriel

Dans toute la suite du chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-ev.

2.1 Définition et caractérisation

Définition 2.1. Soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si, F est un $\mathbb{K}$-ev.

Remarque 2.2. On notera pour simplifier "sev" pour "sous-espace vectoriel".

Proposition 2.3. Soit F une partie de E. Alors F est un sev de E si, et seulement si, :

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u,v) \in F^2,\ u+v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda.u \in F$.

Remarque 2.4. Tous les sev de E contiennent au moins le vecteur nul de E. Pour vérifier que $F \neq \varnothing$, on vérifie le plus souvent que $0_E \in F$.

Proposition 2.5 (caractérisation des sev)**.** Soit F une partie de E. Alors F est un sev de E si, et seulement si, :

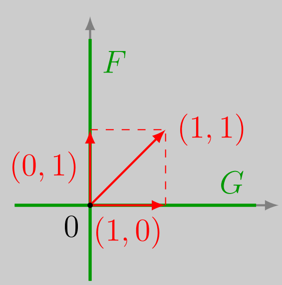
1. $0_E \in F$
2. $\forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.u + v \in F$

2.2 Intersection, somme, sev engendré

Proposition 2.6 (Intersection de sev)**.** Soient F et G deux sev de E.
Alors $F \cap G$ est un sev de E.

Remarque 2.7. La **réunion** de deux sous-espaces vectoriels de E **n'est pas** en général un sous-espace vectoriel de E.

Considérons par exemple les sev de $\mathbb{R}^2$: $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$. Alors $F \cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0,1) + (1,0) = (1,1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F \cup G$.



Définition-Théorème 2.8 (Somme de sev)**.** Soient F et G deux sev de E. On pose

$$F + G = \{u + v, \quad u \in F, v \in G\}.$$

Alors $F + G$ est un sev de E et est appelé la **somme** des deux sous-espaces vectoriels F et G.

Exemple 5. *Soient F et G les deux sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}.$$

Alors

$$F + G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

Définition 2.9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
On dit qu'un vecteur u est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ si, et seulement si, il existe n scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$.

Définition-Théorème 2.10 (sev engendré)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

Cet ensemble est un sev de E appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

3 Familles génératrices, familles libres

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une **famille génératrice** de E (ou **engendre** E) si

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E.$$

Autrement dit, si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Définition 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$

1. On dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ est **liée** si, et seulement si, :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E.$$

   On dit aussi que les u_i sont **linéairement dépendants**.
2. On dit que la famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ est **libre** si, et seulement si, :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

   On dit aussi que les u_i sont **linéairement indépendants**.

Remarque 3.3. Lorsqu'une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs est liée alors l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

4 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4.1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie, c'est-à-dire s'il existe une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs de E telle que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) = E$.

Définition 4.2. Une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si elle est à la fois génératrice de E et libre.

Proposition 4.3. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont les **coordonnées** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 4.4 (Théorème fondamental)**.** Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de E, on le note $\dim(E)$.

Exemple 6. *La dimension de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geqslant 1$) en tant que $\mathbb{K}$-ev est n.*
*On pose $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 0, 1)$. La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ et génératrice de $\mathbb{K}^n$. C'est donc une base de $\mathbb{K}^n$, elle est appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.*

Définition 4.5. Le **rang** d'une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E est la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$. On note

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)).$$

Théorème 4.6. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Tout sev F de E est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. Si F est un sev de E tel que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Proposition 4.7. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie avec $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, et
$\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E avec $p \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors $p \leqslant n$.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors $p \geqslant n$.
- Si $p = n$ alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est génératrice} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est une base.}$$

5 Introduction à la notation matricielle

On considère dans cette section E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On sait que pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

On peut alors identifier x à l'unique vecteur colonne suivant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

formé des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 5.1. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, x et y deux vecteurs de E. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ les vecteurs colonnes associés à } x \text{ et } y \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

Alors le vecteur $\alpha x + y \in E$ est associé au vecteur colonne

$$\alpha X + Y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \alpha x_2 + y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}.$$